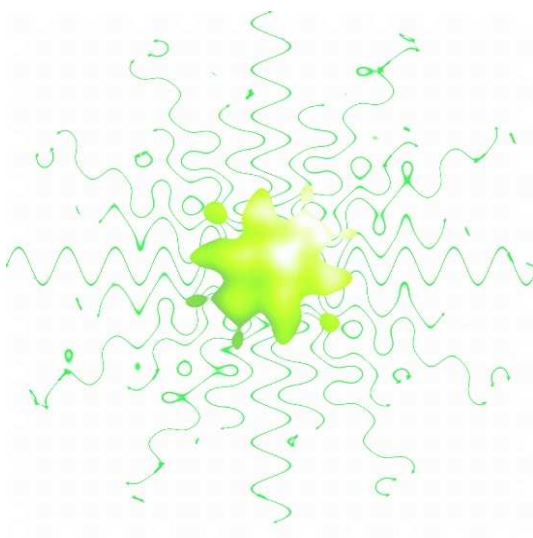


# Fizikaj Eroj



Sabeiro

2005-2010



Fizikaj Eroj fare de sabeiro estas disponebla laŭ la permesilo Krea Komunajo  
Atribuite-Nekomerce-Samkondiĉe 3.0 Neadaptita. Bazita sur verko je [www.inventati.org/kotoba](http://www.inventati.org/kotoba)

# Celo

## 0.1 Antaŭparolo

La celo de tiu eldono estas precipe skribi noton pri la pli gravaj aferoj kiuj mi dekovris studinte la fizikon. Tiuj notoj devas helpi memoriĝi ĉiujn teoremojn, leĝojn, ilojn ... kiuj farigas la fizikon tiel vasta. Oni volas marki la **Ero**jn kiuj estas ia utila kiel pro malkovri en la eldono la difinon de grandecojn, operaciojn, sistemojn ktp. Si oni trovas parolon ne konita eblas serĉi en la indekso tiu parolo kaj vidi si estas difinita en sia propra sekcio.

Estas ankaŭ grava diri ke tiu noto estas ne kompleta kaj ne organika sed utilas pro rigardi la objektojn jam studitajn.

Tiu eldono havas ankaŭ aliajn temojn kiuj ne estas spece fizikaj kaj oni volas paroli pri kelkaj elektoj de naturo empirika aŭ lingvaja.

## 0.2 Tiuj Lingvaj

La scienca vortaro samas preskaŭ ĉie<sup>1</sup> <sup>2</sup>. Oni povas marki, en tiu senso ke, en Esperanto, estante la sintakso ne difinita, oni unuigas kaj ponas al la antencio la plej gravajn vortojn. Ĉiu vorto havas ĉian gramatik formon. Facilas [riconoscere] la vortan funkcion gramatikan kaj kompreni la dependon inter la vortoj kaj inter la konceptoj, precipe per la funkcio de la akusativo kaj per la uzo de *por*, *pro* kaj *per*.

## 0.3 Why not in English?

La angla ligvo estas la pli parolita ligvo en la sciencaj grupoj kaj ofte ne estas petita alian lingvon ekstere la anglan. Mi kreas ke la Esperanto havas grandaj posiblerejoj de priskribi sistemon kun sia flekseco kaj klareco. Oni povas esprimi ion kun la preciseco dezirita kun la uzo de la partikloj *-il-*, *-em-*, *-ar-*, *-aj-* ... kiu faciligas la komprenon de la objekto (modelo) al kiu oni referas sine nomigi nenion en partikle. Pluen, mi kreas en la *Interna Ideo* pensinte ke estas pli rekta doni al ĉiuj la sam posiblerejojn sine diferencoj de naska.

## 0.4 Tiuj Epmirikaj

Laŭ mi, la beleco de la fiziko estas en la proceso konstrui pensaron kiu povas esti utila al la dekovro de la naturaj fenomenoj. La Fiziko estas materio mem estanta kun siaj propraj objektoj sed la metodo pensi kaj analizi la problemojn estas utila en diversaj kampoj. Do oni volas marki, en la solvo de la problemoj, kiel oni povas elekti la hipotezojn kaj la ilojn kiuj al ni utilas.

---

<sup>1</sup>Tia tempo mi ne konis la Alemanon

<sup>2</sup>kaj la Grekon

## 0.5 Notacioj

Oni volas en tiu eldono difini la grandecoj univoke. Oni volas uzi la samajn leterojn kun la samajn grandecoj kiam eblo. Ĉiu notacio estas diversa L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-a komando. Oni montras la pli gravaj konvencioj:

$$\underline{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \quad \underline{x}_i = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N\} \quad \underline{x}_i^N = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N\}$$

$$\underline{\phi}_i(x) = \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\dots\phi_i(x_i)\dots\phi_N(x_N) \quad \phi(\underline{x}) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

$$\mathbf{x} = x^1\hat{e}_x + x^2\hat{e}_y + x^3\hat{e}_z \quad {}^t\langle x | = |x\rangle$$

Kaj grandecoj:  $\mathcal{E}$  energio,  $\mathbf{u}$  denseco de energio,  $\mathcal{V}$  potenciala energio (foje potencialo),  $\mathcal{A}$  libera energio aŭ Helmholtz-a,  $\mathcal{T}$  Temperaturo,  $\mathcal{S}$  Entropio,  $\mathcal{U}$  interna energio,  $\mathcal{Q}$  kaloro,  $\mathbb{I}$  identeco,  $\mathbb{I}$  intenso,  $\mathcal{P}$  probableco,  $c$  konstanto,  $\mathbf{n}$  denseco,  $n$  intera numero,  $i$  intera numero,  $i$  semi intera numero  $\in \mathbb{Z}/2$ ,  $x$  semi reala numero  $\in \mathbb{R}/2$   $z$  kompleksa numero,  $(r, \phi, \theta)$  polaraj koordinatoj,  $d$  diferencialo,  $\hat{O}$  operator,  $\mathcal{G}$  grupo,  $\mathfrak{G}$  algebro,

# Indice

0.1	Antaŭparolo . . . . .	iii
0.2	Tiuj Lingvaj . . . . .	iii
0.3	Why not in English? . . . . .	iii
0.4	Tiuj Epmirikaj . . . . .	iii
0.5	Notacioj . . . . .	iv
<b>1</b>	<b>Elektromagnetismo</b>	<b>1</b>
1.1	Difinoj . . . . .	1
1.1.1	Coulomb-a Forco . . . . .	1
1.1.2	Lorentz-a Forco . . . . .	1
1.1.3	Mova Kuranto . . . . .	1
1.1.4	Denseca Kuranto . . . . .	1
1.2	Maxwell-aj Ekvacioj . . . . .	2
1.3	En la materio . . . . .	4
1.4	Forcoj kaj Derivoj . . . . .	5
1.5	Sarĝa Partiklaro . . . . .	5
1.6	Inonizaĵo . . . . .	5
1.6.1	Difusio . . . . .	6
1.6.2	Mat: Divergaĵo en cilindraj koordinatoj . . . . .	7
1.6.3	Mat: Sferikaj . . . . .	7
1.7	Elmito . . . . .	8
1.8	Magnet Idr Dinamiko . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Ondoj</b>	<b>10</b>
2.1	Generalecoj . . . . .	10
2.1.1	Mat: Fourier-a Bazo . . . . .	10
2.1.2	Elek: Fourier-a Transformo Uzo . . . . .	11
2.2	Oscilanta Sistemo . . . . .	12
2.2.1	Mat: Solvadoj per Laplace . . . . .	13
2.2.2	Elek: Gajno Kalkulita per Poloj . . . . .	13
2.3	Onda Formo . . . . .	14
2.4	Ondaj Parametroj . . . . .	14
2.5	Ondaj Ecoj de la Lumo . . . . .	15
2.5.1	Mat: Nedermineco . . . . .	16
2.6	Muziko . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Analiza Mekaniko</b>	<b>19</b>
3.1	Aroj . . . . .	19
3.2	Kvalitaj Solvadoj de Diferenciala Ekvacio . . . . .	19
3.2.1	Flukso: . . . . .	20
3.2.2	Unua Integralo: . . . . .	20
3.2.3	Klasado de la proksimecoj ekvilibras laŭ la aŭtovaloroj: . . . . .	20
3.2.4	Metodoj Lyapunov-a . . . . .	21
3.2.5	Frenet-a Bazo . . . . .	21

3.3	Lagrange-a Priskribo . . . . .	21
3.3.1	Linearigo: . . . . .	22
3.4	Variacionalaj ecoj . . . . .	23
3.5	Hamilton-a Mekaniko . . . . .	23
3.5.1	Funkio Ĝenerila . . . . .	24
3.6	Perturbata Metodo . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Malvasta Relativeco</b> . . . . .	<b>26</b>
4.1	Geometrio . . . . .	26
4.1.1	Mat: Metriko . . . . .	26
4.1.2	Grupo Lorentz Poincaré-a . . . . .	28
4.1.3	Mat: Grupo . . . . .	28
4.2	Procesoj en Relativeca Mekaniko . . . . .	29
4.2.1	Kvar impulso . . . . .	29
4.3	Maxwell Lorentz-aj Ekvacioj en Kovarianta Formo al Vido . . . . .	32
4.3.1	Maxwell-aj Ekvacioj . . . . .	32
4.3.2	Mat: Distribuoj . . . . .	32
4.3.3	Lorentz-aj Ekvacioj . . . . .	33
4.3.4	Trasformaĵo de la Kampo . . . . .	33
4.4	Ekzercoj . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Kvantuma Fenomenologio</b> . . . . .	<b>36</b>
5.1	Luma Elmito . . . . .	36
5.2	Fotoelektrika Efekto . . . . .	36
5.3	Compton Efekto . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Kvantuma Mekaniko</b> . . . . .	<b>38</b>
6.1	Malsamaĵoj . . . . .	38
6.2	Ekvacio laŭ la memvaloroj . . . . .	38
6.2.1	Mat: Vektoro . . . . .	39
6.2.2	Mat: Operatoroj . . . . .	39
6.3	Potenciala Kavo . . . . .	40
6.3.1	Faktoriĝo . . . . .	42
6.4	Armonika Oscilatoro . . . . .	42
6.5	Angulaj Momantoj . . . . .	43
6.5.1	Mat: Grupo . . . . .	43
6.5.2	Mat: Lie-a Algebro . . . . .	44
6.5.3	Angulaj Momentoj Sumo . . . . .	45
6.5.4	Mat: Tensora Produkto . . . . .	45
6.6	Angula Kompleta Bazo . . . . .	45
6.6.1	Prezento Matrica de la Lie-a Algebro de la Angul Momantoj . . . . .	46
6.7	Ond funkcioj normaligitaj por hidroĝena atomo . . . . .	47
6.7.1	Libera Partiklo . . . . .	48
6.8	Kaŭza Evoluo . . . . .	48
6.8.1	Schrödinger-a Vidado . . . . .	49
6.8.2	Heisenberg-a Vidado . . . . .	49
6.8.3	Interad Vidado . . . . .	49
6.8.4	Matsubara Vidado . . . . .	49
6.8.5	Fermi-a Aurea Reglo . . . . .	50
6.9	Perturbadoj . . . . .	51
6.10	Variacioj Linearaj . . . . .	51
6.11	Kampa Kvantigo . . . . .	52
6.11.1	Mat: Green-a Funkcio . . . . .	54
6.11.2	Mat: Wick-a Teoremo, Dyson-a Ekvacio . . . . .	56
6.12	Ringa Proksimado . . . . .	58

<b>7</b>	<b>Statistika Mekaniko</b>	<b>61</b>
7.1	Distribua Funkcio . . . . .	61
7.1.1	Funkcio Partaga . . . . .	62
7.1.2	Mat: Kombinatoriko . . . . .	63
7.1.3	Mat: Euler-a Gamma kaj Beta . . . . .	65
7.2	Kvantuma Statistiko . . . . .	65
7.3	Ekzercoj . . . . .	69
7.4	Kampa Priskribo . . . . .	70
7.5	Faza Transiro . . . . .	71
7.6	Ising-a Modelo . . . . .	74
<b>8</b>	<b>Procesoj Stokastikaj</b>	<b>75</b>
8.0.1	Mat: Asioma Difino de la Probabla Mizuro . . . . .	75
8.1	Distribuoj . . . . .	75
8.1.1	Difinoj . . . . .	75
8.1.2	Gauss-a, normala . . . . .	75
8.1.3	Binomiala . . . . .	76
8.1.4	Poisson-a . . . . .	76
8.1.5	Mann-Withney Pruvo, sumo de la rangoj . . . . .	77
8.1.6	Mediana Pruvo . . . . .	77
8.1.7	Wilcoxon Pruvo, signa pruvo . . . . .	78
8.2	Bruoj . . . . .	78
<b>9</b>	<b>Materia Strukturo</b>	<b>79</b>
9.1	Notacioj . . . . .	79
9.2	Korektantaj Termoj (Maldisa Strukturo) . . . . .	80
9.2.1	Spin-orbito interacio . . . . .	80
9.2.2	Relativeca Unua Korektado . . . . .	80
9.3	Atoma Vektora Modelo . . . . .	81
9.3.1	Parigo . . . . .	81
9.3.2	Sub Magnetika Kampo . . . . .	81
9.4	Interadoj . . . . .	81
9.4.1	Elektromagnetika Ondo . . . . .	81
9.4.2	Magnetika Interado . . . . .	83
9.4.3	Interado kun Libera Partiklo . . . . .	83
<b>10</b>	<b>Stato Solida</b>	<b>84</b>
10.1	Ligoj . . . . .	84
10.2	Retiklo . . . . .	84
10.3	Fononoj . . . . .	85
10.4	Dielektrika Solido . . . . .	85
10.5	Movaj Elektronoj . . . . .	87
10.6	Bandaj Strukturoj . . . . .	89
10.7	Kuranto . . . . .	91
<b>11</b>	<b>Nukleara Strukturo</b>	<b>93</b>
11.1	Atoma Potencialo . . . . .	93
11.2	Ŝela Modelo . . . . .	94
11.3	Kolektivaj Modeloj . . . . .	95
11.4	Gamma Defalo . . . . .	95
11.5	Reakcioj . . . . .	96
11.5.1	Urta Sekcio . . . . .	96
11.5.2	Kvantuma Interado . . . . .	97
<b>12</b>	<b>Subnukleara</b>	<b>98</b>
12.1	Simetrioj . . . . .	98

<b>13 Kosmologio</b>	<b>101</b>
13.0.1 Ecoj de la Universoj . . . . .	101
13.0.2 Mat: Euler-a $\zeta$ . . . . .	104
13.1 Jeans Modelo . . . . .	106
13.2 Astrofiziko . . . . .	106
<b>A Computacionala Metodo</b>	<b>108</b>
A.1 Difinoj . . . . .	108
A.2 [Codice] . . . . .	108
A.2.1 Memsimileco . . . . .	110
<b>B Tabeloj</b>	<b>111</b>
B.1 Kostantoj . . . . .	111



# Capitolo 1

## Elektromagnetismo

### 1.1 Difinoj

La **Kampo** estas la akcio de masa partiklo en la spaco. La maso estas forco ĝenerilo kiel la (Gravita Maso) ĝeneras la gravita forco  $\mathbf{F} = Gm_1m_2/r^2$  aŭ la (Elektrika Maso) ĝeneras la Coulomb-a forco  $\mathbf{F} = q_1q_2/(4\pi\epsilon) \cdot 1/r^2$ .  $\mathbf{B}$  estas kampo sed ne ĉeestas magnetika maso ĉar ĉi tiu kampo estas ĝenerita por la cirkla movado de la ŝarĝoj kaj sia dependo el elektrika kampo estas bone priskribita por la malvasta relativeco. La dependo de la kampo el la forco estas  $\mathbf{E} = \mathbf{F}/m$ . Sub certaj kondicoj oni povas trovi formon nomatan **Potencialo** kiu estas la difereciala formo laŭ kiu  $\mathbf{E} := -\nabla\phi$  aŭ  $\phi := \int_s \mathbf{E}d^3x$ .

<Gravita Maso

<Elektrika Maso

#### 1.1.1 Coulomb-a Forco

$$\mathbf{F} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{1}{r^2}$$

Forco kiu dependas de la ŝarĝo de la partiklaj  $q_1, q_2$ , sia distanco  $1/r^2$  kaj la medio  $\epsilon_r$ .

#### 1.1.2 Lorentz-a Forco

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \mathbf{F} = I \oint d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Kiu diras ke la movo de la ŝarĝo  $q$  agas forcon se oni havas rapidecon komponon  $\mathbf{v}_\perp$  perpendikla al magnetik kampo  $\mathbf{B}$ . Tia forco neniam agas laboron.  $\int q\mathbf{v} \times \mathbf{B}d^3x = d\mathbf{x} = \mathbf{v}dt$   
 $q \int \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}dt = q \int \det(\mathbf{v}, \mathbf{B}, \mathbf{v})dt = 0$

#### 1.1.3 Mova Kuranto

La mova kuranto estas la tempa variacio de la ŝarĝo ĉeesta en la Gauss-a surfaco.

$$I_d = \epsilon_0 d_t \Phi(\mathbf{E})$$

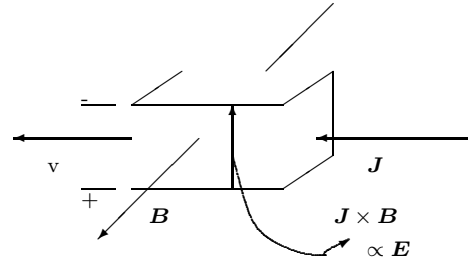
Tia Gauss-a surfaco povas esti la surfaco ĉirkaŭe kondensatora armaturo kaj oni havas mova kuranto se la tensio varias en la tempo ĉar la elektrika nesoleinoidaleco indukas magnetik kampo kaj sekve kuranto.

#### 1.1.4 Denseca Kuranto

$\mathbf{J} = i/S \cdot \hat{n}_S$  estas la kuranto ĝenerita pro la elektrika kaj magnetik kampo laŭe

$$\mathbf{J} = en(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad en = \rho$$

kie  $\rho$  estas la denseco de ŝarĝoj kaj  $n$  la denseco de partikloj. La denseca kuranto estas la sumo de la derivo de la ŝaĝoj pro elektrik kampo kaj **Hall-a Efekto** Kiu priskribas la potencialo ĝenerita por kontraŭiri al la movo de ŝarĝoj pro la Lorentza forco.



## 1.2 Maxwell-aj Ekvacioj

La elektrik kampo ne estas solenoidala se ĉeestas ŝarĝojn ene la Gauss-a surfaco ĉar la kampo elmetita de tiu ŝarĝoj elfluas sole.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

De la Faraday-Neumann leĝo sur la indukado, la variacio de la magnetika flukso naskas potencialon.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad v = \oint_\gamma \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\partial_t \Phi_B = -\partial_t \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} \quad (1.2)$$

La magnetika kampo estas ĉiam solenoidala, prefere ne ekzistas monopoloj magnetikaj.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (1.3)$$

La magnetika kampo estas generita pro la kurantoj kunkatenigitaj (Leĝo de Biot-Savart) kaj por la mova kuranto.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E} \quad \oint_\gamma \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \Phi_E \quad (1.4)$$

## Potencialoj

Ekzistas potencialon de kiu oni povas deduki la kampojn  $\mathbf{E}$  kaj  $\mathbf{B}$ . Oni povas defini du diversaj potencialojn per la du diversaj kampoj sed kiel oni povas didi en la malvasta relativeco sekcio oni povas uzi unu solan kvar potencialon.

### Th: Helmholtz-a

*Si oni konas la diverĝenco kaj la rotoro de iu kampo kaj tiuj estas limitaj de  $1/r^2$  ( $(\nabla \mathbf{F})r^2 \rightarrow 0$ ,  $(\nabla \times \mathbf{F})r^2 \rightarrow 0$ ) al la senfino oni povas skribi la kampon kiel*

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\nabla \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' - \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

⊗

Oni konas pluen ekvalencon kun la Poisson-a ekvacio

$$\nabla^2 \mathcal{V} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow V(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Do la nerotacionalaj kampoj  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  estas ĉiam skribeblaj kiel gradianto de potencialo.

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V$$

dume, ĉiam per la Helmholtz-a teoremo oni povas skribi la solenoidalan kampon kiel

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Oni havas ankaŭ ekvalenta Poisson-a ekvacio

$$(\nabla \times)^2 \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\mu_0 \mathbf{J} - 0 \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

En la nestaciona kazo oni devas konsideri ankaŭ la temp variacio de la potencialo kiel priskribita el la Maxwell-a ekvacioj

$$\mathbf{E} = -\nabla\mathcal{V} - \partial_t \mathbf{A} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

La relacio  $\nabla \cdot \nabla \times = 0$  montras ke la difino de la vektora potencialo  $\mathbf{A}$  ne estas univoka sed oni povas elekti *gauge*-an kampon  $\Lambda$  kiu plitenas tiun kondicon, prefere estas nevariantaj per la Maxwell-aj ekvacioj.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla \Lambda \Rightarrow \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}' = \mathbf{B}$$

Se

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha} \quad \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V} + \beta$$

oni devas demandi ke por la magnetika kampo  $\nabla \times \boldsymbol{\alpha} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \nabla \Lambda$  dume per la elektra  $\nabla \beta + \partial_t \boldsymbol{\alpha} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \nabla(\beta + \partial_t \Lambda) = 0$ .

Ekzistas diversaj *gauge*-aj kampoj kiel pro ekzemplo la |Lorentz-a gauge| kiu estas definita per

$$\nabla \mathbf{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathcal{V} \quad \square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \square \mathcal{V} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\square := \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2$$

En la |Coulomb-a gauge|

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \nabla^2 \mathcal{V} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

## Povo kaj Energio

La energia denseco de la elektr magnetik ondoj estas donitaj por

$$u = u_m + u_e = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$$

Oni povas ankaŭ difini la |Pointyng-a Vektoro| kiel vakue

$$\mathbf{Y} := \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \quad |\mathbf{Y}| = c \epsilon_0 E^2 = cu = \frac{c}{\mu_0} B^2$$

kiu estas kunigita kun la energia denseco  $u$  kaj kun la inteso, la presiono kaj la potenco per

$$\mathbf{I} = \langle \mathbf{s} \rangle \quad \mathcal{P} = \frac{\mathbf{F}}{S} = 2 \frac{\langle \mathbf{Y} \rangle}{c} = 2 \langle u \rangle = 2 \frac{\mathbf{I}}{c} \quad \langle d\mathcal{W} \rangle = r^2 d\Omega \langle \mathbf{Y} \rangle \hat{r}$$

Oni povas nun enkonduki la |Poynting-a Teoremo| laŭ kiu oni povas esprimi la potenco de la elektromagnetik kampo per

$$\mathcal{W} = \int_V \mathbf{E} \mathbf{J} d^3x = -d_t \mathcal{U} - \oint \mathbf{Y} d\mathbf{S}$$

### 1.3 En la materio

La elektronoj kiuj moviĝas ĉirkaŭe la nukleo havas sian propran **|Dipola Magnetik Momanto|** kiu enkondukas la magnetikaĵo de la materialo de  $\mathbf{n}$  denseco de elektronoj

$$\mathbf{m} := i\mathbf{S} \quad \mathbf{M} := n\mathbf{m} \stackrel{aŭ}{=} \int \mathbf{m}(\mathbf{r})d^3x$$

La vektora potencialo estas do

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{x}}{r^2} d^3x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{M}(\mathbf{x}) \times \nabla \frac{1}{r} d^3x$$

$$\int \nabla \mathbf{v} d^3x = \oint \mathbf{v} d\mathbf{S}$$

oni volas uzi la teoremo de la diverĝenco

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{r} \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}') - \nabla' \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{r} d^3x'$$

kiu montras du diversaj kurantoj, la unua de surfaco  $\mathbf{J}_B$  kaj la dua lineara  $\mathbf{J}_{lin}$ . Oni povas pluen vidi

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{lib} \quad \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_B \quad \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{J}_{lin}$$

La indukta kampo estas tre utila ĉar oni povas trovi la alian kampoj sciante sole la kurantojn kunkatenitajn. Fakte

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = ni \quad \mathbf{H}_1 \mathbf{l} + \mathbf{H}_2 \mathbf{l} = i_{kunk}$$

kie (1) kaj (2) estas du diversaj medioj. Inter du medio oni devas pluteni la *[kontorn] kondicioj*

$$\mathbf{H}_1^{//} - \mathbf{H}_2^{//} = \mathbf{J}_{lin} \hat{\mathbf{n}} \quad \frac{B_1^{//}}{\mu_1} - \frac{B_2^{//}}{\mu_2} = \mathbf{J}_{lin} \hat{\mathbf{n}} \quad \mathbf{B}_1^\perp - \mathbf{B}_2^\perp = 0$$

Oni volas konsideri nun la efekto de la elektra kampo sur la dielektrikaj materialoj ĉar la konduktoroj havas liberaj ŝarĝoj kaj ne gajnas **|Polarizaĝo|n**  $\mathbf{P}$ . Si oni havas eksterna elektra kampo la molekuloj de la materialo se havas momanto dipola povas orintiĝi laŭe la kampo, se ne la dipola momanto p kreigas

$$\mathbf{p} := q\mathbf{x} = \alpha \mathbf{E} \quad \mathbf{P} := n\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x})d^3x$$

La polarizaĝo estas ankaŭ la surfaca denseco de la ŝarĝoj en la materialo  $\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_E$ . Eksistas alia grava kampo kiu nomiĝas induktado  $\mathbf{D}$  kaj estas tia relacio inter tiuj kampoj

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{lib} \quad \nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_{lig}$$

kie *lib* ĉeestas per liberaj dume *lig* per ligitaj. Oni povas ankaŭ trovi la kuranton del la ligitaj ŝarĝoj kalkulinte la diverĝencon de la polarizaĝo.

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \mathbf{J}_{lig} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \mathbf{J}_{lib}$$

La *[kontorn] kondicioj* estas

$$\mathbf{E}_1^{//} = \mathbf{E}_2^{//} \quad \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2 = \sigma_{lib} \quad \epsilon_1 \mathbf{E}_1 - \epsilon_2 \mathbf{E}_2 = \sigma_{lib}$$

Ekzistas aliajn relaciojn inter tiuj kampoj difinitaj per la grandecoj **|Dielektrika Kostanto|** relativa  $\epsilon_r$  kaj [Suscettività]  $\Xi$  kiuj ĝenere ne estas ne kostantoj  $\epsilon_r = \epsilon_r(\mathbf{r}, \omega)$  ne skalaraj  $\Xi = \Xi^{<>}$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0(1 + \epsilon_r) \mathbf{E} \quad \epsilon_r := 1 + \Xi$$

### 1.4 Forcoj kaj Derivoj

$$m\dot{\mathbf{v}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}/q)$$

Si oni ponas

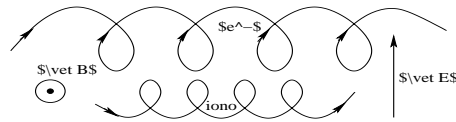
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{dE} + \mathbf{v}_{dF} \quad \mathbf{v}_{dE} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad \mathbf{v}_{dF} = \frac{\mathbf{F}_{\perp} \times \mathbf{B}}{qB^2}$$

do

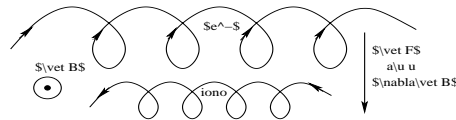
$$m\dot{\mathbf{v}} = m\dot{\mathbf{v}}' + \overset{=0}{m\dot{\mathbf{v}}_{dF}} + \overset{=0}{m\dot{\mathbf{v}}_{dE}} \quad m\dot{\mathbf{v}}' = q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}$$

kiu priskribas la cirklan movadon ĉirkaŭe la magnetik kampo traslata per la direkciono de la ekstera forco de la elektrika kampo. La signo de la ŝarĝo ŝanĝas la version de la rotado kaj la direkcion de la derivo por la kostanta forco. La orbitoj estas diferentaj ĉar la Larmor-a radio estas minusa por la iono ol elektronoj.

La sama efekto estas ĝenerita pro la divergaĵo de  $\mathbf{B}$  kiu estas ortogonala al  $\mathbf{B}$  kaj



agaz kiel kostanta forco.



### 1.5 Sarga Partiklaro

$n \stackrel{n}{=} 10^{20} [m^{-3}]$   $\mathcal{T} \stackrel{n}{=} 20 [KeV]$   $\tau_e \stackrel{n}{=} 1 [s]$ . Ario densecas  $2.7 \cdot 10^{25} [m^{-3}]$ . Se la gaso estas plene ionizita tiu numero duoblas  $n_e = n_i$ , elektronoj kaj iono.

### 1.6 Inonizaĵo

Pro ionizigi gazon oni devas aldoni energion al atomoj pligranda de la nivelaj energioj de la elektronoj. Oni povas doni tiun energion a) per fotonoj kiu elmetas la elektronoj se  $h\nu \geq \mathcal{E}_{ligo}$  aŭ se b) aliaj partikloj ( $e^-$ , iono) havas kinetika energio pli granda ol liga energio  $1/2mv^2 \geq \mathcal{E}_{ligo}$  kiu sekvas sia propra rapideca distribuo al la donita temperaturo  $\mathcal{T}$ . La temperaturo kreskas por la Joule-a efekto ĝenerita pro la kuranto de movaj ŝarĝoj. Oni havas elmito akaŭ pro c) kampa efekto prefere por la pasaĝo de la ligo bariero per tunela efekto. En ia urto oni devas konsideri ke oni povas gajni internan energion de partiklo kiu pasas en alian energian staton. Do la energio de la proceso donas aŭ prenas pli energion.  $1/2m_1v_1^2 = 1/2mv_1'^2 + 1/2m_2v_2^2 + \Delta\mathcal{U}$ . La partiklo povas doni ĉian sian energion al la alia partiklo pliteni ĝin en ekcita stato perdiginte sia rapideco.

$$dN = \sigma n N dx \quad N = N_0 e^{-n\sigma x}$$

estas la variacio de la numero de la partikloj interacie. Oni do difinas la

$$\lambda := \frac{1}{n\sigma}$$

la **|Pado libera media|**, la mez distanco inter du urtoj kaj  $\sigma$  la kostanto de proporcionaleco inter la inicialaj kaj finalaj partikloj. Ĝenere  $\sigma$  dependas de la temperaturo  $\mathcal{T}$ .

Oni povas difini distancon pro kiu la elektrono ne reiras al la atomo kiu estas la diferanco inter sia kinetika kaj potenciala energio.

$$\mathcal{E} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + k\mathcal{T}$$

Se la energio estas nea la elektrono estas ligita, la kontraŭo kontraŭe. Oni povas difini la distancon kritikan inter ĉi tiu du kondicoj.

$$d_0 := \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{2}{3k\mathcal{T}} \stackrel{n}{=} \frac{1.1 \cdot 10^{-5}[m]}{\mathcal{T}[K]}$$

La partikloj estas distribuita en mez radio  $a_0 \simeq 1/\sqrt{n} \stackrel{n}{=} 300[nm]$  do  $n$  iniciala partikloj povas rekombini laŭe  $dn = -rek\mathbf{n}_i\mathbf{n}_e dt$  kie  $rek$  dependas de  $(d_0(\mathcal{T}), a_0(\mathbf{n}))$ ,  $dn/n^2 = -rek dt$   $\mathbf{n}(t) = \mathbf{n}_0/(1 + \mathbf{n}_0 \cdot rek \cdot t)$ .

uze:  $\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_e$

### 1.6.1 Difusio

Oni volas konsideri du diversaj aroj de partikloj  $A$  kaj  $B$ . La mez valoro de la terma rapideco kaj aliaj parametroj estas

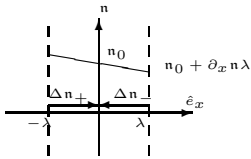
$$\langle v_B \rangle = \langle v_A \rangle = \sqrt{\frac{8k\mathcal{T}_A}{m\pi}} \quad \lambda_A = \frac{1}{\sigma_{AB}\mathbf{n}_B} \quad t_{kolizo} = \frac{\lambda_A}{v}$$

1/6 de la partikloj moviĝas versen la  $\hat{e}_x$  akso. Oni konsideras stacionarian leĝon por la difusio tipe

$$\mathbf{n}_A(x) = \mathbf{n}_0 + \partial_x \mathbf{n} x$$

Do la numero de partikloj kiuj difusigas tra la jesa akso inter media pado estas  $\Delta \mathbf{n}_{\hat{e}_x} = 1/6 \int_{-\lambda}^0 \mathbf{n}_A(x) dx = 1/6 \int_{-\lambda}^0 \mathbf{n}_0 + \partial_x \mathbf{n} \cdot x dx$

$$\Delta \mathbf{n}_{\hat{e}_x} = \Delta \mathbf{n}_{\hat{e}_x+} - \Delta \mathbf{n}_{\hat{e}_x-} = -\frac{1}{6} \partial_x \mathbf{n} \lambda^2$$



La flukso denseco estas priskribita per la numero de partikloj sur la eneca tempo kaj surfaco  $\Phi = \Delta \mathbf{n}/t$ .

$$\Phi(0) = -\frac{1}{6} \lambda v \partial_x \mathbf{n} = -D \partial_x \mathbf{n} \quad D = \frac{1}{6} \lambda v \quad \text{ĝenere} \quad \Phi \nabla (D \mathbf{n})$$

Kalkuloj pli kurigitaj montras  $D = 1/3 \cdot \lambda v$  por obteni la **|Flick-a Relacio|**  $\Phi = -D \nabla \mathbf{n}$ . Dum la tempo kreskas la flukso ŝanĝas  $\partial_t \mathbf{n}(x) dx = \Phi(x) - \Phi(x + dx)$

$$\partial_t \mathbf{n}(x) dx = -D d_x \mathbf{n} \Big|_x - \left( -D \partial_x \mathbf{n} \Big|_{x+dx} \right)$$

disvolvigante  $\partial_x \mathbf{n}|_{x+dx} = \partial_x \mathbf{n}|_x + \partial_x (\partial_x \mathbf{n}|_x) dx \dots = \partial_x \mathbf{n}|_x + \partial_x^2 \mathbf{n}|_x dx \dots$

$$\partial_t \mathbf{n}(x) dx = -D \left( \partial_x \mathbf{n} \Big|_x - (\partial_x \mathbf{n} \Big|_x + \partial_x^2 \mathbf{n} \Big|_x dx) \right) = D \partial_x^2 \mathbf{n} \Big|_x dx$$

$\partial_t \mathbf{n}(x) = D \partial_x^2 \mathbf{n}|_x$  aŭ en tri dimensioj  $\partial_t \mathbf{n} = D \nabla^2 \mathbf{n}$

$$\partial_t \mathbf{n} = D \nabla^2 \mathbf{n} = -\nabla \Phi$$

## Lastro Unudimensionala

Oni povas vidi ke la du membroj estas dipenantaĵoj de diversaj variabloj, prefere estas unu kostanta en la tempo la alia en la spaco. La solvado estos la faktoriĝo de la termo temp dipenda kaj tia spaca.

$$\partial_t \mathbf{n} = D \nabla^2 \mathbf{n} \quad \mathbf{n}(a, t) = \mathbf{n}_t(t) \cdot \mathbf{n}_x(x) \quad \frac{d_t \mathbf{n}_t(t)}{\mathbf{n}_t(t)} = D \frac{\nabla^2 \mathbf{n}_x(x)}{\mathbf{n}_x(x)}$$

se oni ponas  $D \nabla^2 \mathbf{n}_x / \mathbf{n}_x|_{t_0} = -\omega$  kaj  $k = \sqrt{1/D\tau}$  oni obtenas la ekvacio de viskosa [smorcado] kaj de la harmonika oskylatoro

$$\mathbf{n}(x, t) = \mathbf{n}_x(x) \cdot \mathbf{n}_t(t) = t_0 e^{-\omega t} \left( \mathbf{n}_0 \cos(kx) + \mathbf{n}'_0 \sin(kx) \right)$$

Tia funkcio ne povas esti nea do en la intervalo  $[-L = -\pi/2k, L = \pi/2k]$  ĉeestas sole la cos termo.

$$\mathbf{n}(x, t) = \mathbf{n}_0 e^{-\omega t} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

### 1.6.2 Mat: Divergaĵo en cilindraj koordinatoj

Mat

La divergaĵo  $\nabla = \partial_x + \partial_y + \partial_z$  fariĝas

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{r} \partial_r (r \cdot E_r) + \frac{1}{r} \partial_\phi E_\phi + \partial_z E_z$$

dume la gradiento

$$\nabla \mathcal{U} = \partial_r \mathcal{U} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\phi \mathcal{U} \hat{e}_\theta + \partial_z \mathcal{U} \hat{e}_z$$

la rotoro

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left( \frac{1}{r} \partial_\phi E_z - \partial_z E_\phi \right) \hat{r} + \left( \partial_z E_r - \partial_r E_z \right) \hat{\phi} + \frac{1}{r} \left( \partial_r (r E_\phi) - \partial_\phi E_r \right) \hat{z}$$

do la Laplace-a

$$\nabla^2 \mathcal{U} = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \mathcal{U}) + \frac{1}{r} \partial_\phi \left( \frac{1}{r} \partial_\phi \mathcal{U} \right) + \partial_z (\partial_z \mathcal{U}) = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \mathcal{U}) + \frac{1}{r^2} \partial_\phi^2 \mathcal{U} + \partial_z^2 \mathcal{U}$$

✓

### 1.6.3 Mat: Sferikaj

Mat

En la sferikaj koordinatoj

$$\nabla = \hat{r} \partial_r + \hat{\theta} \frac{1}{r} \partial_\theta + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi$$

$$\nabla \cdot = \hat{r} \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 + \hat{\theta} \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta \sin \theta + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi$$

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\theta \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2$$

La solvado de la ekvacio radia en sferikaj koordinatoj

$$\partial_\rho^2 \psi(\rho) + \frac{1}{\rho} d_\rho \psi(\rho) + \left( k^2 + \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) \psi(\rho) = 0$$

estas prezentitaj de la **Bessel-a Ekvacioj**

$$J_{\pm\nu}(x) = \left( \frac{x}{2} \right)^{\pm\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j + \nu + 1)} \left( \frac{x}{2} \right)^{2j}$$

✓

## 1.7 Elmito

Oni volas priskribi la potencialon en la kaso de sola mova ŝarĝo aŭ de multipola elmito

### Mova Ŝarĝo

Si oni havas la potencialoj en la *gauge*

$$\square \mathcal{V} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

kaj oni volas solvi tiun diferencian ekvacion laŭe la spaca variabla. Oni konsideras iu funkcio  $f(\mathbf{r}, t)$  kaj kiel oni povas vidi en la sekvanta ĉapitro ia funkcio estas prezentigebla kiel sumo de siaj harmonikaj komponantoj en la Fourier-a bazo.

$$\square f(\mathbf{r}, t) = -s(\mathbf{r}, t) \xrightarrow{\hat{}} (\nabla^2 + k^2) \hat{f}(\mathbf{r}, \omega) = -\hat{s}(\mathbf{r}, \omega)$$

Oni povas vidi ke  $\exp(\pm ikr)/r$  estas solvado de la diferenciala ekvacio kiu estinte de dua grado havos kiel solvado la sumo de du esponenciala termoj

$$(\nabla_r^2 + k^2)g(r) = 0 \quad (\nabla_r^2 + k^2)\frac{e^{ikr}}{r} = -4\pi\delta(r) \Rightarrow g(r) = C_1\frac{e^{ikr}}{r} + C_2\frac{e^{-ikr}}{r}$$

oni povas nun la neomoĝena solvinte

$$\begin{aligned} \hat{f}(\mathbf{r}, \omega) &= \int d^3r' \frac{C_1 e^{ikr} + C_2 e^{-ikr}}{4\pi r} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(\mathbf{r}, t) = \int d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi} \int d^3r' \frac{C_1 e^{ikr} + C_2 e^{-ikr}}{4\pi r} \int dt' e^{i\omega t'} s(\mathbf{r}', t') \end{aligned}$$

$$t_a := t - \frac{r}{c} \quad t_a := t + \frac{r}{c}$$

Reskribinte  $kr = \omega r/c$  oni povas do trovi por la ecoj de la Dirac-a  $\delta$

$$f(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \frac{C_1 s(\mathbf{r}', t_r) + C_2 s(\mathbf{r}', t_a)}{4\pi r}$$

oni havas tempon  $t_r$  [itardato] kaj  $t_a$  [vanzato] kiu ne estas fizika.  $C_1$  povas sole esti egala al 1 do nia solvado estas finfine

$$f(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \frac{s(\mathbf{r}', t_r)}{4\pi r}$$

Se oni uzas la harmonika proksimaĵo oni skribos la fluktuaĵo de la denseco de la ŝarĝoj kiel

$$\rho(\mathbf{r}', t_r) = \rho(r') e^{ikR} e^{-i\omega t} \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r) = \mathbf{J}(r') e^{-i\omega t} e^{ikR}$$

de kiuj

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} ik \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r} \times \int \mathbf{J}(r') e^{ikr'} d^3r'$$

### Dupola Proksimaĵo

## 1.8 Magnet Idr Dinamiko

La Magnet idr dinamiko kombinas la ekvaciojn de la fluantojn aŭ gasojn (kiel la kontinueco de la materio aŭ la leĝo de la ideala gasoj) kun tiujn de la elektromagnetikaj kampoj (Maxwell-aj). Ĝenere oni trovas ekvaciojn de la formo

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B} & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) \\ \partial_t \rho_m &= -\nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) & \rho_m d_t \mathbf{v} &= -\nabla \mathcal{P} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{E} \end{aligned}$$

tiu sistemo havas 12 ekvaciojn kaj 14 nekonatojn do ne estas malferma. Tiu signifas ke oni devas poni eksterne aliaj kondicioj kiuj povas solvi la sistemon



## Ondaj Magneto Idr Dinamikaj

Oni volas kombini la leĝo de Faraday, Ampere kaj Ohm pro priskribi la movo de la ŝarĝo en kondukatora fluado

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \partial_t \mathbf{B} \stackrel{\partial_t \mathbf{E} \stackrel{?}{=} 0}{=} \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}$$

kaj kun la konservo de la maso kaj de la momanto

$$\partial_t \rho + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \rho \partial_t \mathbf{v} + \rho(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\text{d}_p - \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

# Capitolo 2

## Ondoj

### 2.1 Ĝeneralecoj

La **Ondo** estas la solvado de la eliksa diferenciala ekvacio  $\square\psi(\mathbf{x}, t) = 0$  kie  $\square$  estas la **D'Alambert**  $\square$  ke oni povas konstrui sekvinde la priskribo de la ondo sur kordo. La tensio al la du kapoj de la kordo estas egala, se oni volas koni la vertikalan komponanton  $\hat{z}$  ene intervalo  $z, z + \Delta z$  oni scias ke la diferenco inter la forcoj estas

$$\Delta F = T \sin \theta - T \sin \theta' \simeq T \left( \partial_z \psi \Big|_{z+\Delta z} - \partial_z \psi \Big|_z \right) \simeq T \partial_z^2 \psi \Delta z \quad F \stackrel{?}{=} m \ddot{\psi}$$

$m = \mu \Delta z$

de tiu oni povas solvi separe la ekvacio laŭe la tempo kaj laŭe la spaco.

$$\partial_t^2 \psi = \frac{T \Delta z}{m} \partial_x^2 \psi \quad \square \psi = \left( \partial_t^2 - \frac{1}{v^2} \partial_x^2 \right) \psi = 0$$

$\mu$  estas la denseco lienara de la kordo kaj  $v$  la rapideco de la propagado. Anakŭ la presiona kaj la elektromagnetika ondo havas la saman [comportamento] dume la Schrödinger-a ond ekvacio solvas la parobolan diferencialan ekvacion. La ond ekvacio  $\square \psi = 0$  estas solvita de ĉiuj ondoj de la formo  $\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{k}x \pm \omega t)$  kie  $\omega$  estas la **Pulsado** kaj  $\mathbf{k}$  la **Numero Onda**

$$\omega := \frac{2\pi}{T} \quad |\mathbf{k}| := \frac{2\pi}{\lambda}$$

kie  $T$  estas la periodo de la ondo kaj  $\lambda$  la ond longeco. Oni ĝenere dividas la ondojn per siaj frekvencaj komponantoj. Sekvinde la Fourier-a priskribo oni konstruas ia ondo per lineara kombino de sia harmonik komponantoj

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int \hat{A}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega t} d^3k$$

nomante  $A(\mathbf{x})$  la *amplitudo* de la ondo.

#### 2.1.1 Mat: Fourier-a Bazo

Mat

La **Fourier-a Sistemo** en  $\mathcal{L}^2(0, 1)$  estas komponita da la funkcioj

$$\eta_k(x) = e^{2\pi i k x} = \cos(2\pi k x) + i \sin(2\pi k x), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ĉi tiu sistemo estas totalo, nomiĝas *bazo trigonometrika* pro tiu ia funkcio iĝas priskribita en *armonika sistemo*. Per tiu bazo oni povas malkomponi ia funkcio  $\in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , aŭ se perioda ( $\phi(t+T) = \phi(t)$ ),  $\in \mathcal{L}^2(0, T)$ , per la skalara produkto en **Fourier-a Bazo**

$$\eta_k(x) = T^{-\frac{1}{2}} e^{2\pi i \omega_k x} \omega_k = k/t_0, k \in \mathbb{Z}$$

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\eta_k, \phi) \eta_k(x), \quad (\eta_k, \phi) = \int_0^T e^{-2\pi i \omega_k x} \phi(x) dx$$

La **Fourier-a Transformata** de ia funkcio  $\phi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T}^n)$  estas la vektoro  $\hat{\phi} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T}^n)$  difinita per:

$$\hat{\phi}(k) = (\eta_k, \phi) = \int_{\mathbb{T}^n} \phi(x) e^{-2\pi i k x} dx.$$

## Ecoj

La sekvantaj ecoj valoras nediferencie por la transformo kaj la funkcio.

- Simetrio koniuga: Se  $Im[x(t)] = 0$  do  $\hat{x}(\omega) = \hat{x}^*(-\omega)$
- Simetrio para: Se  $x(t) = x(-t)$  do  $\hat{x}(\omega) = \hat{x}(-\omega)$
- Simetrio nepara: Se  $x(t) = -x(-t)$  do  $\hat{x}(\omega) = -\hat{x}(-\omega)$
- Lineareco:  $ax_1(t) + bx_2(t) \hat{=} a\hat{x}_1(\omega) + b\hat{x}_2(\omega)$
- Dualeco:  $\hat{\hat{x}}(t) \hat{=} x(\omega)$
- Skala ŝanĝo:  $x(at) \hat{=} \frac{1}{|a|} \hat{x}(\omega/a)$
- Tempa malfruo:  $x(t - t_0) \hat{=} e^{-i\omega t} \hat{x}(\omega)$
- Diferencialo:  $d_t x(t) \hat{=} i\omega \hat{x}(\omega)$
- Konvoluo:  $\int x(\tau) y(t - \tau) d\tau \hat{=} \hat{x}(\omega) \hat{y}(\omega)$
- Integracio  $[-\infty, t]$ :  $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \hat{=} \frac{\hat{x}(\omega)}{i\omega} + \frac{\hat{x}(0)\delta(\omega)}{2}$
- Integracio  $[-\infty, \infty]$ :  $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau = \hat{x}(0)$
- Norma konservo:  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(\omega)|^2 d\omega$  |Parseval-a Teoremo|
- Operacia traslado:  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \widehat{y}(\omega) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}(\omega) y(t) dt$

✓

### 2.1.2 Elek: Fourier-a Transformo Uzo

ElektronikMet

La distribuo de la intenco rilate la frekvenco estas esprimita por el kvadrato de la modulo de la Fourier-a transformata de  $f(t)$ : **Spektro Potenca**  $\rho(\nu) = |\hat{\phi}(\nu)|^2$ . Per la spektro potenco oni kiras la **Autokorelacio** de la signalo

$$Corr[\phi, \phi](t) = \int_{\mathbb{R}} \phi(\tau + t) \phi(\tau) d\tau$$

aŭ la grado de aŭto simileco de la signalo.

#### Wiener-Khinchin

Th:

Se  $\phi \in \mathcal{L}$  estas realo, sekvas

$$[Corr[\widehat{\phi}, \widehat{\phi}]](\nu) = |\hat{\phi}(\nu)|^2.$$

⊗

Por la numerika kalkulo oni uzas nur la **Fourier-a Trasformo Diskreta**

$$\phi^k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \phi e^{-i2\pi jk/n} \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Oni akiras al **Speciamento** kiu epikas la solaj frekvencoj  $\nu_j = \frac{j}{n\delta}$  per  $j = -\frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2}$ . La maksima,  $\nu_c$ , nomiĝas **Nyquist-a Frekvenco Kritika** kaj estas inverse proporcia al la intervalo de speciamento. Se la potenco spetro havas maksima frekvenco  $\nu_{maks}$  oni eletki  $\nu_c \cong \nu_{maks}$  por havi nenian perdon de informo. **Aliasoj** Se estas frekvenco ekster la intervalo  $[-\nu_c, \nu_c]$  lia komponantoj estas reflektitaj kaj sumitaj al la propraj kun la efekto ke la transformo en la domajno de la frekvenco havas pli grande intenso por la termoj al la ekstremaĵoj. Estante la Fourier-a transformo globala eco, oni enkondukas la **Fourier-a Lokata Transformo** kiu estas la  $\hat{\phi}(\nu, t)$  de ia  $\mathcal{L}^2 \ni \phi(x, t) = \psi^*(x-t)\phi(x)$  kun  $\psi \in \mathcal{L}^2$  difinita per

$$\hat{\phi}(\nu, t) = \int_{\mathbb{R}} \psi^*(x-t)\phi(x)e^{-2\pi i\nu x} dx.$$

Estas la “versio loka” de  $\phi(x)$  en la subtenanto de  $\psi$  kiu estu kompakta kaj egala al  $[-\tau, 0]$  intervalo pro kaŭzeca kondico.  $\psi$  nomiĝas **Funkcio Lokanta** aŭ *Fenestro* kiu agas kiel ia noto al la frekvenco  $\nu$  en iu momento. Inverse:

$$\phi(x) = \frac{1}{\|\psi\|^2} \int \psi_{\nu,t} d\nu dt.$$

Oni konsideras daŭrige diversaj momentoj aŭ frekvencoj ĉar ne povas ŝanĝiĝi la precizeco de informo. Per ĉiu fenestro oni akiras ĝia

$$\text{baricentro} : t_0 = \int_{\mathbb{R}} t|\psi(t)|^2 dt \quad \nu_0 = \int_{\mathbb{R}} \nu|\hat{\phi}(\nu)|^2 d\nu$$

$$\text{normadevio} : \tau^2 = \int_{\mathbb{R}} (t-t_0)^2|\psi(t)|^2 dt \quad \nu^2 = \int_{\mathbb{R}} (\nu-\nu_0)^2|\hat{\psi}(\nu)|^2 d\nu$$

Se  $\psi(t) = \sqrt[4]{2ae^{-\pi at^2}}$ , do  $\hat{\psi}(\nu) = \sqrt[4]{2ae^{-\pi \nu^2/a}}$  kun  $t_0 = \nu_0 = 0$  sekvas

$$\tau = \sqrt{1/4\pi a} \quad \nu = \sqrt{a/4\pi} \quad \tau\nu = \frac{1}{4\pi}$$

kaj ĝenere oni esprimas la **Nedetermina Principo**

$$\tau\nu \geq \frac{1}{4\pi}. \quad (2.1)$$

⊙

## 2.2 Oscilanta Sistemo

Oni volas montri la solvado de du-grada diferenciala ekvacio kiu priskribas la solvon de iu sistemo oscilanta. Tiu sistemo estas priskribita per la ekvacio  $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m}$  kie  $\gamma$ ,  $\frac{1}{CL}$  en la elektrona kazo, nomiĝas **Atenua Faktoro**, kaj  $\omega_0$ , difinita kiel  $\frac{k}{m}$  en la mekanika kazo a u  $\sqrt{\frac{R}{L}}$ , nomiĝas **Propra Frekvenco**. La solvado de la omogena asociita estas  $x(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t + \sqrt{(\frac{\gamma}{2})^2 - \omega_0^2}t} + c_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t - \sqrt{(\frac{\gamma}{2})^2 - \omega_0^2}t}$ . La solvado kiu nin interesas, de malgranda atenuo pro  $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$ , havas termon elipsan  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\frac{\gamma}{2})^2}$  kaj iperbolan  $\frac{\gamma}{2}$ , prefere

$$x = c_1 e^{\frac{\gamma}{2}t} e^{i\omega t} + c_2 e^{\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega t} \quad (2.2)$$

aŭ  $\mathbf{x} = e^{\gamma t} \begin{pmatrix} c_1 e^{i\omega t} \\ c_2 e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$  per  $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix}$ ,  $\dot{x} = v$ .

### 2.2.1 Mat: Solvadoj per Laplace

Pro la rilato

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right](s) = \frac{1}{s}[\mathcal{L}(f)](s) \Rightarrow [\mathcal{L}(f')](s) = s\mathcal{L}(f) - f(0)$$

sekvas ke, por la du grada sistemo  $ay'' + by' + cy = f(t)$  oni akiras

$$a(s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y(0)) + b(s\mathcal{L}(y) + y(0)) + c\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}f(t)$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{ay_0s + ay_1 + by_0}{as^2 + bs + c} + \frac{\mathcal{L}f(t)}{as^2 + bs + c}$$

aŭ  $\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[h] + \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]$  per ia funkcio  $h$  kaj  $g$ .  $y$  estas do

$$y = h + f * g.$$

Pro la ecoj de la transformo de Laplace oni obtenas  $h$  per  $\mathcal{L}(h) = \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2}$  kie  $s_1, s_2$  estas la nuloj de  $as^2 + bs + c = 0$  kaj  $A, B$  parametroj dekovrintaj. Nia solvo estas sekve:

$$h(t) = Ae^{s_1t} + Be^{s_2t}$$

aŭ  $\mathcal{L}(h) = \frac{M}{s-s_1} + \frac{N}{(s-s_1)^2}$ ,  $h(t) = Me^{s_1t} + Nte^{s_1t}$  se la nulo estas duobla. Ni do kondukas la kalkulojn al la faktoriĝo de la denominatoro. Estas tre utila skribi la problemon per sumo de denominatoroj separatitaj en ilin faktoriĝoj. Per la resiuduoĵ oni povas dekomponi la denominatoron. Por ekzemplo si oni havas funkcion kun du poloj oni povas reskribi

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{1}{(s+2)}\Big|_{s=-1} \frac{1}{(s+1)} + \frac{2}{(2-1)!}d_s\left(\frac{1}{(s+1)}\right)\Big|_{s=-2} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(2-2)!}d_s^0\frac{1}{s+1}\Big|_{s=-2} \frac{1}{(s+2)^2} = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} - \frac{1}{(s+2)^2}$$

Si oni volas do kalkuli la Laplace transformiĝo oni obtenas

$$f(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) - te^{-2t}u(t)$$

Simile

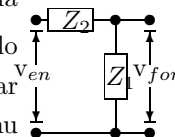
$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{2(s+i)} - \frac{1}{2(s-i)} \xrightarrow{\mathcal{L}} u(t) - \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = u(t) - \cos t$$

✓

### 2.2.2 Elek: Gajno Kalkulita per Poloj

ElektronikMet

En Elektroniko oni konsideras la funkcion transiran pro ia cirkvito estas  $A_v(\nu) = \frac{v_{for}}{v_{en}} = \frac{Z_{\Delta v_{for}}}{Z_{\Delta v_{en}}}$ , kie  $Z_C = \frac{1}{sC}$  estas la kondensatora impedanco kaj  $Z_L = Ls^2$  la indukta,  $A_v(\nu) = \frac{Z_{\Delta v_{for}}}{Z_{\Delta v_{en}}} = \frac{Z_1}{Z_1+Z_2} = \frac{1}{1+Z_2/Z_1}$  = en la kazo de [pasa] basa filtrilo =  $\frac{1}{1+i/2\pi\nu RC} = \frac{1}{1-i\nu\nu_{suba}/\nu}$  kie  $\nu_{suba} = \frac{1}{2\pi RC}$  estas la frekvenco je 3Db suba ĉar  $|A_v(\nu_{suba})| = \frac{1}{\sqrt{1+(\nu_{suba}/\nu)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Pri sola stadio al la altaj frekvencoj agas nur unu polo.



$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} A(\nu) = \frac{A_0}{1 + i\nu/\nu_{polo}} = \frac{A_0}{1 + i\frac{2\pi\nu}{2\pi\nu_{polo}}} = \frac{A_0}{1 + \frac{s}{2\pi\nu_{polo}}}$$

do

$$A(s) = \frac{A_0 2\pi\nu_{polo}}{s - (-2\pi\nu_{polo})} = \frac{A_0}{s - s_{p0}}$$

kie  $\nu_{polo} = \frac{|s_{po}|}{2\pi}$  nomiĝas **Frekvenco pola**. Aŭ ĝenere por pli stadoj

$$A(s) = k \frac{(s - s_{n_1}) \dots (s - s_{n_i})}{(s - s_{p_1}) \dots (s - s_{p_j})}$$

kun  $s_n$ . nuloj de la funkcio kaj  $s_p$ . poloj. Se  $\nu_{p_i} > 4\nu_{p_j}$  pro iu  $i, j$   $\nu_{p_i}$  nomiĝas **Polo Dominanta**.

Ni reskribas la (??) trigonometre kun frekvenca kaj faza termo.

$$x = Ae^{-(\gamma/2)t} \cos(\omega t + \phi) = a\ddot{u} \Re(Ae^{i\phi} e^{i\omega t} e^{-\frac{\gamma}{2}t}).$$

Por kalkuli la mezuma energio, sciante ke la energio sin disipa termo  $\gamma$  estas konserva, oni obtenas

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 (\sin^2(\omega_0 t + \phi) + \cos^2(\omega_0 t + \phi)) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$$

ne dependa de  $t$ . Se la disipa termo estas  $\gamma \ll \omega_0$  valoras malmulto en la periodo do  $\langle U(t) \rangle = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-\gamma t}$ .

$\gamma$  estas la frakcio de energio staplita kiu perdiĝas en la tepunuo  $-\dot{U} \langle \frac{1}{U} \rangle = \gamma$  kaj  $\tau = \frac{1}{\gamma}$  estas **Tempo Defala** de la oscilatoro, tempo en kiu la energio malkreskas de  $\tau$  faktoro.

### Resonanco

La resonanco montriĝas kiam eksterna periodika forco  $F = F(\omega)$  agas sur armonika sistemon

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \omega_0^2 x + F \cos(\omega t)$$

kie  $\gamma$  estas la atenua faktoro kaj  $\omega_0$  la propra frekvenco de la sistemo.

Resonanca Kesto > Ia (Resonanca Kesto) aŭ sonkesto valoras pro tiu longeco nature pluroba de la ondo-frekvenco laŭ la rilato  $d = (2\mathbb{N} + 1)\frac{\lambda}{4}$  tial ia ondo necesas de nodo, kiu estas la fundo de la kesto, kaj ia kavito tam longe konteni kresto aŭ gorĝo ke previgas la termo  $\frac{1}{4}$ .

## 2.3 Onda Formo

### Normaj Modoj

Oni uzas la scion pri la solvado de diferencialaj ekvacioj por priskribi kompleksaj sistemoj. Se oni havas du oscilatoroj parigitaj oni povas priskribi la sistemo se libera kaj ne estingita) per

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\mathbf{x}$$

kun  $a_{21}$ ,  $a_{12}$  parigaj termoj, kiu provizi solvadojn trigonometrajn

## 2.4 Ondaj Parametroj

Nun oni priskribas la parametrojn kiuj difinas la ecojn kaj la formon de la ondoj

### Osciloj:

Oni konsideras omoĝena ŝnuro ligata je la ekstremoj, ni priskribas la funkcion  $\psi(z, t)$ , lokmovo del la ŝnuro transverse ĉar ĝia laŭlonga kompono nulas. La koordinato  $w$  priskribas la ago de  $(x, y)$  la du komponantoj de la polarizo.

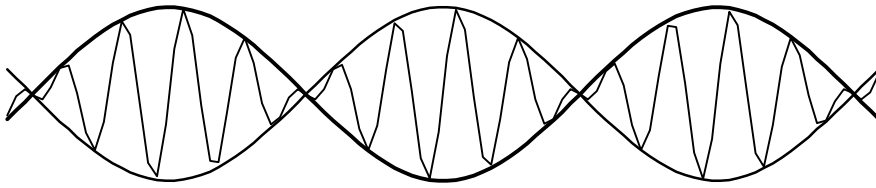


Figura 2.1: Batado

Disuzaj:

**[Ondo Disusa]** kiam la rilato inter onda nombro  $k$  kaj pulsado  $\omega$  estas ne proporcia. Iu Ondo formata de du komponantoj de sama fazo kaj sama amplitudo kies formo estas  $\psi(z, t) = A \cos(\omega_1 t - k_1 z) + A \cos(\omega_2 t - k_2 z)$  aŭ  $\omega_0 = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ ,  $\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$ ,  $k_0 = \frac{k_2 + k_1}{2}$ ,  $k = \frac{k_2 - k_1}{2}$  do  $\psi(z, t) = 2A \cos(\omega t - kz) \cos(\omega_0 t - k_0 z)$ . Tiu ondo estas preskaŭ armonika en la termo de la dua faktoro  $\omega_0$  kiu estas la pli granda kaj nomiĝas portanto, propagas kun **[Rapideco Faza]**  $v - f = \omega_0/k_0$ , rapideco de la malgrandaj krestoj kiuj aperas al la komenco de la paketo kaj malaperas fine. La **[Rapideco Grupa]** estas la rapideco de la pli granda amplitudo tiu ke  $d(\omega t - kz) = 0$  kaj sekvas

$$v_g = d_t z = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} \quad \text{aŭ} \quad \hat{\text{genere}} \quad v_g = d_k \omega.$$

(akvo disiganta) en la akvo la disiga rilato estas  $\omega^2 = kg \tanh(kh)$  kie  $h$  estas la profundeco. Pro profunda akvo la proksimuma rilato  $\omega^2 = kg$  montras ke la faza rapideco  $v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$  rilatas kun la grupa rapideco per  $v_g = d_k \omega = \frac{1}{2} v_t$  tial la akvo estas tre disiga medio. Finfine oni difinas la faza rapideco kiel la rapideco de iu frekvenco  $v_f = \frac{\omega}{k} = \lambda \nu$  kaj la grupa rapideco per  $v_g = d_k \omega$ . Oni difinas **[Indico Rifrakta]** la reĝso inter la rapideco en la vakuo kaj medie  $\nu(\omega) = \frac{c}{v_f(\omega)}$ .

Sekvas:

Leĝo de Snell-Descartes: La surfac tanĝa komponanto koserviĝas en la transiro inter du medioj  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$

Indico rifrakta dependas far la ondfrekvenco *do* travidebla medio disigas la lumon en ĝiaj komponantoj.

Ondo inter du medioj reflektiĝas kaj rifraktiĝas

Reflekto kaj Refrakto

Iu ondo incidanta sur ia medio, priskribita per  $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0i} e^{i(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})}$ , transformiĝas en du komponantoj, rifrakta (aŭ transira) kaj refleksa kiuj havas la saman ekvacion.

$$\mathbf{E}_{0i} e^{i(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_i)} + \mathbf{E}_{0r} e^{i(\omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i)} = \mathbf{E}_{0t} e^{i(\omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}_i)}$$

La projekcio sur la surfaco samu ĉie kaj ĉiam *do*:

per  $r = 0$  ĉiuj pulsacioj samu,

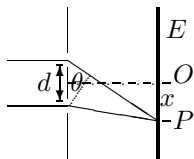
per  $t = 0$  ia kompono nuliĝas ( $ekz : k_{rx} x + k_{tx} x = 0$ ) kaj alia samiĝas ( $ekz : k_{ty} = k_{ry} = k_{iy}$ ).

$|k_i| \sin(\theta_i) = |k_t| \sin(\theta_t) = |k_r| \sin(\theta_r)$ ,  $|k_i| = \frac{n_1}{c} \omega$ ,  $|k_t| = \frac{n_2}{c} \omega$ .  $k^2 = k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2$ ,  $k_{t\perp}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)$  ke per totala reflekso ( $\theta_i > \arcsin \frac{n_2}{n_1}$  |  $n_2 > n_1$ ) estas imaĝa *do*:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k_{ty} r_y - i k_{tz} r_z)} = \mathbf{E}_0 e^{-|k_{tz}| r_z} e^{i(\omega t - k_{ty} r_y)}$  tio estas la amplitudo malaperas kun eksponenciala leĝo tial ke se ni metas alia medio de pli granda indico oni reprenas ia amplitudo.

## 2.5 Ondaj Ecoj de la Lumo

Interfero

Oni volas konsideri la amplitudo de lumo, kiu pasas inter du fendoj, sur l'ekrano  $E$ .



Ĉia formo estas sur la punkto  $P$ ,  $E(P) = \frac{A_1}{r_1} \cos(\omega t - kr_1 + \phi_1) + \frac{A_2}{r_2} \cos(\omega t - kr_2 + \phi_2)$  tiu ke  $E^2(P) = \left(\frac{A_1^2}{r_1^2} + \frac{A_2^2}{r_2^2} + 2\frac{A_1 A_2}{r_1 r_2} \cos(\phi_2 - \phi_1 - k(r_2 - r_1))\right) \cos^2(\omega t + \alpha)$  dume  $\langle E^2(P) \rangle = \frac{A_1^2}{r_1^2} + \frac{A_2^2}{r_2^2} + 2\frac{A_1 A_2}{r_1 r_2} \cos(\phi_2 - \phi_1 - k(r_2 - r_1))$  prefere:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_2 - \phi_1 - k(r_2 - r_1)).$$

Se la faza termo konstantas (ekz: se la fonto estas la sama per ambaŭ la lumoj) la

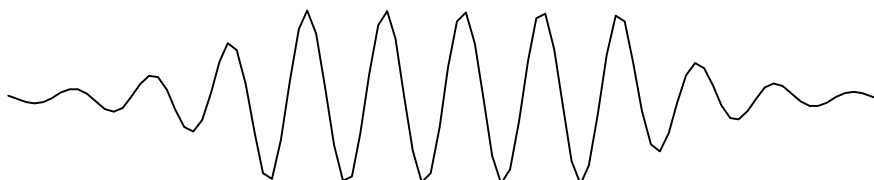
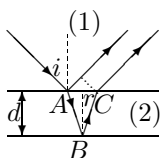


Figura 2.2: Paketo

termo  $(r_2 - r_1)$  determinas la maksimumojn kaj minimumojn de la amplitudo. Simple  $(\phi_2 - \phi_1) = 0$  do  $I_{maks} = \{I(r_2, r_1) | r_2 - r_1 = 2\mathbb{Z}\pi\}$  kaj  $I_{min} = \{I(r_2, r_1) | r_2 - r_1 = (2\mathbb{Z} + 1)\pi\}$ . Pli simple se la ekranon longas (kiel se oni interponas lenon) oni povas konfuzi la sinuso kun la tanĝanto. La antaŭa rilato iĝas  $\frac{x}{l} d = 2n\frac{\lambda}{2}$  aŭ  $n = \frac{x}{l\lambda}$ .

Ĉeestas kondiĉoj en kiu, pli simple, oni vidas interferajn fenomenojn tiu estas kiam la lumo renkontas ian medion kun indico pli granda ĉar refraktiĝas kaj refleksiĝas. La koeficiento de reflekso estas ĝenere malgranda (ekz: 0.04 aere) kaj estas ĝenere du aŭ tri la termoj kiuj interferiĝas. La vojo de la dua radio rilate la unuan estas pli granda de  $\overline{ABC} = 2d \tan(r) \sin(i)$  kaj la faza malfruo  $\overline{ABC} - \overline{AC} = 2d \tan(r) n_2/n_1 \sin(r) - nd/\cos(r)$ . Do se tia vojo estas  $\lambda/2(2N)$  oni obtenas nove la detruan interferencon kaj se  $\lambda/2(2N + 1)$  la deviga (ĉar en la pasaĝo inter medio de grand rifracia indico kaj malgranda la radio faziĝas de  $\pi$ ,  $\Delta = 2dkn_2/n_1 \cos(r) + \pi$ ). Oni vidas ke la relacio dependas de  $\lambda$  kaj  $i$  ĉar  $r = i \arcsin(n_1/n_2)$ . Tial:



$$2d \frac{n_2}{n_1} \cos(r) = \begin{pmatrix} (N + 1/2)\lambda \\ (N)\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} maks \\ min \end{matrix} \quad (2.3)$$

### Paketo

La interferenco estas uzata ankaŭ por mezuri la frekvencon kaj la koheran tempon. Ĉiu ondo, nature, estas produkta en finita tempo (ekz: pro la transiro inter du atomaj niveloj) kaj devas formi |**Paketo**| $n$ , konsistanta el diversaj frekvencaj ( $\Delta\nu$  bando de frakvencoj) kaj amplitudoj tion akiras la Fourier-a malkompono. La tempo en kiu la paketo estas formata nomiĝas |**Tempo Kohera**| kaj la rilato ku la bando de frekvecoj estas  $\Delta T \Delta\nu = 1$  aŭ  $\Delta k \Delta x = 2\pi = \Delta\omega \Delta t$  kiel rezulto de  $\hat{\psi}(x) = \Psi(k)$ .

### Mat 2.5.1 Mat: Nedermineco

$\psi(x)$  estas la onda paketo difinita per  $\psi(x) = \psi_0 \cos(k_0 x)$  kun  $-\frac{\Delta x}{2} \leq x \leq \frac{\Delta x}{2}$  kaj  $\psi(x) = 0$  per  $|x| > \frac{\Delta x}{2}$ . La ondo estas terma kosinusa kaj per la ortonormaleco de la Fourier-a bazo

$$\Psi(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cos(kx) dx = \frac{\psi_0}{2\pi} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \cos(k_0 x) \cos(kx) dx$$

$$\Psi(k) = \frac{\psi_0 \Delta x \sin(k - k_0) \Delta x/2}{2\pi (k - k_0) \Delta x/2}$$

✓ ke pro  $k \simeq k_0$  kaj  $-\frac{\pi}{2} < (k - k_0) \frac{\Delta x}{2} < \frac{\pi}{2}$  sekvas ??.



Nu, oni povas aŭtointerferi ia ondo ĝin farinta perkuri du diversajn vojojn, ia pli longe de la alia. Oni povas malkovri maksimumaj kaj minimumaj de la amplitudo ĝis vidi la du ondojn disigiataj al la fino de la tempo aŭ spaco kohera.

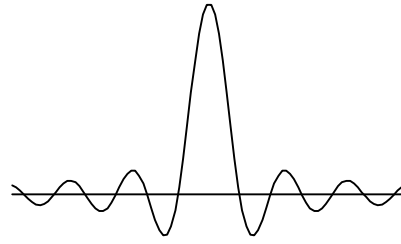


Figura 2.3:  $\text{sinc}(x)$

Difrakto

**P** rincipo de Huygens-Fresnell: oni povas konsideri ĉiu punkton de la radio kiel fonto kaj akiri al la onda fronto per envolviĝo de ĉiuj fontoj

Kiam ia elektromagneta ondo  $E = e^{i(\omega t - \mathbf{x}\mathbf{k})}$  enkontras fendon longan kelkajn multoblojn entierajn de sia ond longeco lumas ankaŭ la zono de geometria ombro ĉar oni devas konsideri sian ondan konduton. Oni kalkulas la kampo pluen:

$$E(\theta) = Ae^{i\omega t} \int_{-d/2}^{d/2} e^{-ikx \sin(\theta)} dx = dAe^{i\omega t} \text{sinc}(k \cdot d/2 \sin(\theta)).$$

Prenante la realan parton  $E(\theta) = Ad \text{sinc}(k \cdot d/2 \sin(\theta)) \cos(\omega t)$  oni kvadratigas kaj mezumigas sur la periodo por akiri la intenso

$$I = A^2 d^2 / 2 \text{sinc}^2(k \cdot d/2 \sin(\theta)) \tag{2.4}$$

En aproksimo de granda longeco  $\sin(\theta) = \xi/L$  kie  $L$  estas la distanco de la fendo kaj  $\xi$  la distanco de la piedo de ortanto. La difrakto per cirkla fendo estas priskribita per la Bessel-aj funkcioj. Kiam ia ondo enkontras korpoj kun dimensioj kompareblaj kun sia ond longeco vibrigas ĝin kiel agas ia fortanto sur oscilanta sistemo de propra frekvenco  $\omega_0$ . Tiu ĉi korpoj agas kiel resonataj fontoj kaj elmetas siavice kun la sama frekvenco  $\omega_0$  nedipenda de la ondo frekvenco  $\omega$ .  $\omega_0$  dipenas do de la dimensioj kaj interdistanco de la korpoj. Fakte la ĉielo estas lazura tage kaj ruĝa sunsubire ĉar altaĵe la parteceloj estas pli distancataj kaj la amplitudo de la elektrik kampo estas proporcia al  $\omega^2$ , kiel estas la akcelo ( $\ddot{x}(t) \propto D^2(\cos(\omega t)) \propto \omega^2$ , tial la intenso al  $\omega^2$ . La termoj ruĝaj estas preskaŭ dek fojoj munusaj krom al la sunsubiron kiam la lumo pasas pli da tempo en la densa atmosfero. La difrakto de tioma da incoheraj fontoj estas nomata **|Difuzo|** dume oni povas konsideri la kazo pli priskriebla de  $N$  koheraj fendoj. La rezulta kampo estas la sumo de la termoj de ĉiu fonto  $\sum_{i=1}^{N-1} E_f(\theta) e^{i\phi}$ , kie  $\phi$  estas  $\phi = ka \sin(\theta) = 2\pi/\lambda \sin \theta$  diferenco de optik vojo, kiu oni povas esprimi

$$E = E_f \frac{e^{iN\phi} - 1}{e^{i\phi} - 1} = Ad \text{sinc}(k \cdot d/2 \sin(\theta)) \frac{\sin(N\phi/2)}{\phi/2} e^{i(\omega t + (N-1)\phi)}.$$

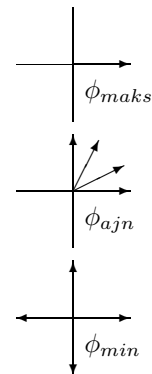
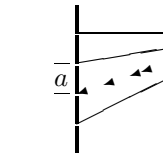
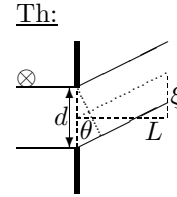
Oni akiras la intenson per

$$\langle \Re(E)^2 \rangle = I(\theta) = I_f(\theta) \frac{\sin^2(Nka \sin \theta/2)}{\sin^2(ka \sin \theta/2)} \tag{2.5}$$

dependo de la elmeta intenso pro la angulo. Laŭe la antaŭa rilato, la maksimumo kongruas al la valoroj de  $\phi = 2\pi n$  aŭ  $a \sin(\theta) = n\lambda$  per kiuj  $I = N^2 I_f(\theta)$  kiam la  $I_f$  estas faze.  $\phi_{maks}$  estas  $2\pi n$  kaj  $\phi_{min} = 2\pi/N$ . La diferenco inter maksimumo kaj minimumo estas  $\Delta\phi = 2\pi a/\lambda (\sin \theta_{min} - \sin \theta_{maks}) = 2\pi/N$  aŭ  $\sin(\theta_{maks} + \Delta\theta) - \sin(\theta_{maks}) = \lambda/Na$  do  $\Delta\theta \simeq \lambda/Na$ . Oni volas akiri al **|Distinga Kapablo|** serĉante ia diferenco de ond longeco  $\delta\lambda$ .  $\theta \simeq \sin \theta = n\lambda/a$  do  $\delta\theta = \delta\lambda n/a$ ,  $(n/a)\delta\lambda \geq \lambda/(Na)$  kie  $\delta\lambda$  estas la pli malgranda diferenco videbla kaj

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = nN$$

estas la distinga kapablo de la difrakt reto.



## 2.6 Muziko

Oni difinas la **Tono** la frekvenco de la noto kaj **Timbro** la sono karakteriza de ĉio instrumento. Oni scias ke la frekvenco de srumento estas  $\nu = vl$  kie  $l$  estas la lungeco de la kordo aŭ de resonanta [tubo] kaj  $v$  estas la rapideco kiu por la kord instrumentoj dependas de la lineare denseco  $\mu = m/\Delta z$  kaj de la tensio de la kordo  $\rho$  sekvante la leĝo  $v = \sqrt{T/\mu}$ . Por la aer instrumentoj la rapideco dependas de la presiono kaj de la denseco de la medio  $v = \sqrt{\partial\mathcal{P}/\partial\rho}$ . Fakte la presiono ne estas grava kiel la tensio ĉar la resonanta kavo de la instrumento ampligas la fundamenta frekvenco kaj ĝiaj harmonikaj sur ĉiuj.

Poste la noto oni parolas pri la [akordo] kiu estas la superpono de du, tri aŭ pli notoj. La superpono de du notoj donas diversan efekton al la [askolto], si la du frekvencoj havas interan [raporto]n inter ilin  $n/m$  ĉiu  $n$  osciloj de la unua noto la dua faros  $m$  osciloj kaj la amplitudo de la sumo estas periodika kaj donas sono de frekvenco  $\nu_\Sigma = n\nu_1 = m\nu_2$  plue la frekvenco de la aliaj notoj. Si la frekvencoj ne havas interan [raporto] la sono estas neperiodika kaj male ŝatas al la [askolto]. Pli la raporto havas malgrand interajn numerojn pli la suma sono donas [sensazione] de stabileco. La (Diada Akordo) kiu havas [raporto]n pli malgrandan el ĉiuj estas  $2/3$ , prefere ĉiu du osciloj de la **Fundamenta La**  $440[Hz]$  oni havas noto pli alta  $3/2 \cdot 440[Hz]$  ĝin faris tri foje. La Grekoj inventis modon por konstrui notojn irante de la raporto kun la fundamentalo. La akordado estas la defino de frkvencoj kiu elektas la notojn [do re mi fa sol la si do] **Pitagora-a Akordado** konstrui la sekvencon de notoj laŭe [1 ...  $2/3$  ... 2] ĉar laŭe Pitagora la numero kvin ne estas perfekto kial la perfektaj numeroj staras en la dek punktaj triangulo. Eksistos ankaŭ la **Tolomeo-a Akordado** kiu elektis la [raporto]j [1 ...  $2/3$  ...  $7/8$  2]. En la fino de la *barok*-a periodo oni inventis la **Akordo Temperata** kiu elektas dekdu fiks intervalojn inter la notojn [1  $13/12$   $7/6$   $5/4$   $4/3$   $17/12$   $3/2$   $19/12$   $5/3$   $7/6$   $11/6$   $23/12$  2]

# Capitolo 3

## Analiza Mekaniko

Oni volas nu enkonduki al la bazoj de la Lagrange-a kaj Hamilton-a priskribo kaj marki iliajn malsamaĵojn. La unua havas sian kialon en la priskribo de la aro kaj koordinataj de la pozicio kiu estas kunigitas kun la rapideco, sian unua derivajo. Pri la Hamilton-a priskribo oni uzas du variabloj kunigitas kiel momanto unu de la alia. Ofte la variablo estas de pozicio sed ne ĉiam. Oni devas konsideri la mekanika problemo kiel iu formulita de Newton, la forco estas  $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}$  kaj ne dependas de pliajn derivaĵ gradoj. Iu akcelo dependas sole de potencoj de  $\underline{\mathbf{x}}, \dot{\underline{\mathbf{x}}}$ .

### 3.1 Aroj

Oni nomiĝas **|Konfigura|** ĉio kiu rilatas al la pozicio. La **|Konfiguracia Spaco|** estas la aro en kiu  $\underline{\mathbf{x}}$  valoras. Kial  $\underline{\mathbf{x}}$  estas ia sistemo de koordinatoj kiel  $\sum_i (r, \phi, \theta)_i$  aŭ la anguloj de aronika oscilatoroj la konfiguracia spaco estas la Cartesio-a produkto de la intervaloj en kiu estas difinita, ekz:  $(0, \infty) \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1/2$  aŭ  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Oni pensas al ĉio koordinato kiel temp dependa kaj sercas la derivaĵon  $\dot{\underline{\mathbf{x}}}$  de ĉiu pozicio  $\underline{\mathbf{x}}$ . La aro de  $\underline{\mathbf{x}}_t$  estas kurbo (unu dimensio) kaj la mapo  $t \mapsto \hat{\mathbf{x}}$  estas la **|Orbito|**. La **|Faza Spaco|** estas la spaco en kiu estas difinitas  $(\underline{\mathbf{x}}, \dot{\underline{\mathbf{x}}})$  kaj la **|Faza Portreto|** estas sia prezento en Cartesio-a aksoj kunigitas en kuploj  $(x, \dot{x})$ . Si la pozicio estas difinita en iu varieco sia derivaĵo devas esti tanĝa al tiu varieco. Do oni povas imagini la varieca surfaco malkomponita per fibroj (ekz: secante la aroj de la varieco kiuj dependas de unu sole koordinato foje) kaj poni en ĉiu punkto tanĝan kurbon. Oni do kreas la **|Tanĝa Fibrato|**

$$TQ := \{(x_1, x_2, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_N) \in \mathbb{R}^{6N} \mid \underline{\mathbf{x}} \in Q, \dot{\underline{\mathbf{x}}} \in V \in T_{\underline{\mathbf{x}}}Q\}$$

$\underline{\mathbf{x}}(x_1, x_2, \dots, x_N)$  estas loka sistemo de koordinatoj aŭ loka imersio de  $U \in \mathbb{R}^N$ .

Oni nomiĝas la varieco (ankaŭ temp dependa) ke ligas la pozicio sur unu surfaco, la **|Ligilo Olonoma|**, kiu povas esti imaginata kiel forcoj ( $\vec{\Phi} = (\Phi_\gamma, \Phi_n, \Phi_b)$  sur kurbo kiel la Frenet-a bazo) kiuj ĉie nuligas ĉian eksteran forcon normalan al la varieco. La prezento de la  $\dot{\underline{\mathbf{x}}}$  en tiu senco estas univoke difinita de la aparteno al la tanĝa fibrato. La ligilo estas ideala si  $\vec{\Phi} \cdot \dot{\underline{\mathbf{x}}} = 0$  prefere la rapidoj estas ortogonala al ĉiuj vinklaj reacioj mode ke la vinklaj reacioj ne agas laboron per  $t$  fiksa.

### 3.2 Kvalitaj Solvadoj de Diferenciala Ekvacio

Pro la Cauchy-a teoremo de ekzisto kaj unikeco oni povas fari simple konsideroj pri la ecoj de tiuj orbitoj. La Newton-a formulo  $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}$  estas prezentigebla per  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$   $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(x, \mathbf{v})$  aŭ

$$X(x, \dot{x}) = \begin{pmatrix} v \\ F(x, v) \end{pmatrix}$$

Kie  $X(x, v)$  estas la **|Kampo|**.

Por koni la disvolviĝo de la sistemo oni devas studi la ecoj de la ekvilibroj kaj disigiloj. Si oni volas scii kiam la sistemo hatiĝas oni nuldas la rapidon kaj serĉas la korespondajn valorojn  $\underline{x}^*$  de  $X(x, v) = 0$  kiu nomiĝos **|Ekvilibra Konfigurado|**. La **|Ekvilibra Punkto|** estas do  $(x^*, 0)$ . Ĉirkaŭe la ekvilibro oni linearigas la kampon en potenca serio fine al la unua termo. Do

$$\dot{\underline{x}} = A_{ij}(\underline{x} - \underline{x}^*) + O(\underline{x}^2) \quad A_{ij} = \partial_{x^j} X_i(\underline{x}) \Big|_{\underline{x}=\underline{x}^*}$$

$A_{ij}$  Jacobi-a matrico kiu oni bone priskribas la iradon de la ekvilibra ĉirkaŭo. La **|Disigilo|** estas la kurbo kiu kunigas du ekvilibroj sine neniam kunligi ilin sed disas la orbitojn inter du diversaj iradoj. Oni akiras al la orbit ekvacion forigante la tempon. La solvadoj de Cauchy-a problemo  $\underline{x}(t; \underline{x}_0) : \underline{x} + 0 \mapsto \underline{x}(t; \underline{x}_0)$  teniĝas en ia proksimiĝo  $|\underline{x}(t; \underline{x}'_0) - \underline{x}(t; \underline{x}_0)| \leq e^{\omega t} |\underline{x}_0 - \underline{x}'_0|$  ke, kaze, povas esti plibonigita.

Kiam la forco ne depenas pro la tempo la orbitoj ne intersekas kaj havas temp traslacian invariancecon. Ĉi tiu permatas de difini specialan ecojn de la flukso.

### 3.2.1 Flukso:

**|Flukso|**  $\Phi^{\mathbf{X}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, \mathbf{x}_0) \mapsto \Phi^{\mathbf{X}}(t; \mathbf{x}_0) := \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \circ \Phi_t^{\mathbf{X}}$ . La flukso agas sur la aro de inicialaj datoj.

Ecoj: I)  $\Phi_0^{\mathbf{X}}$  identeco II)  $\Phi_t^{\mathbf{X}} \circ \Phi_s^{\mathbf{X}} = \Phi_{t+s}^{\mathbf{X}}$ , III)  $(\Phi_t^{\mathbf{X}})^{-1} = \Phi_{-t}^{\mathbf{X}}$ , IV)  $\Phi_t^{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  estas difeomorfismo. La aro de difeomorfismoj  $\Phi_t^{\mathbf{X}}$  formas grupon rilate la kompono kaj estas omomorfa al la adiktiva grupo in  $\mathbb{R}$ . Pro la ne-aŭtonomaj ekvacioj oni devas indiki la iniciala tempo ĉar oni perdas la traslacieco  $\Phi_{t;t_0}^{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_0)$ . Ne-aŭtonoma ekvacio rekundukiĝas al aŭtonoma ekvacio en sistemo de  $\mathbb{R}^{n+1}$  sed ne ekzistas plu ekvilibroj.

### 3.2.2 Unua Integralo:

La **|Unua integralo|** de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$  se estas senŝanĝa laŭlonge la solvado de la ekvacio  $f(\mathbf{x}, t; x_0)$  aŭ  $f \circ \Phi_t^{\mathbf{X}} = f, \forall t$   $f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = cost \Rightarrow \frac{d}{dt} f = 0$ . Per tia valoro de la unua integralo la solvadoj devas resti sur nivelaj aroj de tiu ĉi funkcio. La faza spaco estas malkomponas laŭ neŝanĝema subvarieco de unu dimensio minusa. Se estas pli integraloj la solvadoj teniĝas en la interseco de tiuj ĉi. Estas  $f_1, f_k$ , funcionale sendependa se lia Jacobi-a matrico havas la maksiman rangon. Unua integralo havas lia gradienton normalan al la sistemo de diferenciala ekvacio kaj solvas  $\mathbf{X}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{x} = 0$ . De tio, oni konstruas la derivaĵo de Lie:  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbf{X}} f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definita laŭ  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbf{X}} f := \mathbf{x} \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i} f = \mathbf{X} \cdot \nabla f = \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla f = d_t f$ . Se  $f$  estas unua integralo  $\{f, H\} = 0$

### 3.2.3 Klasado de la proksimecoj ekvilibras laŭ la aŭtovaloroj:

Reala Aŭtovaloroj: la armonika repuŝilo stabila pro  $\lambda > 0$  instabila pro  $\lambda < 0$ . Oni povas elekti baza ŝaniĝo ke eblas diagonaligi  $A$  pro la matrico  $P$

$$\mathbf{y}(t) = P^{-1} e^{At} \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

Oni akiras la sekvanta iperbola fasko kiu donas  $y_2 = cost |y_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$   $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$  ekvilibrio stabila,  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  **|Selo|**,  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  ekvilibrio instabila. Se aŭtovaloro nuldas solvadoj rektas. Oni kunigas al la solvado iperbola al la parto reala kaj al tiu imaĝa la rotacia solvado. Matrico kun koniuga duopo de aŭtovaloroj kompleksaj esprimiĝas per

$$\begin{pmatrix} \Re(\lambda) & \Im(\lambda) \\ -\Im(\lambda) & \Re(\lambda) \end{pmatrix}$$

Se la reala parto estas nula la faza portreto nomiĝas **Centro**. La solvadoj kun kompleksaj aŭtovaloroj rapresentiĝas per  $e^{At}\mathbf{x}_0 = e^{\alpha t}PR(\beta t)P^{-1}\mathbf{x}_0$ . La ekvilibro diriĝas iperbola se  $\Re(\lambda) \neq 0$  aŭ elipsa se  $\Re(\lambda) = 0$  kaj  $\Im(\lambda) \neq 0$ . En la mekanika ŝanco la unua integralo konsistas el kinetika termo  $1/2mv^2$  kaj potenciala  $\mathcal{V}(x)$  do studinte la formo de  $\mathcal{V}(x)$  oni akiras al la orbo de la faza portreto, kiu estinta senŝanĝa, valoras la rilato  $\mathcal{E} = 1/2mv^2 + \mathcal{V}(x) = \text{cost}$ . Oni studas nu la aron  $\mathcal{J}_e = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | V(x) < e\}$ .  $\partial_{\mathbf{x}}\mathcal{E} = \nabla V(\mathbf{x}), \partial_{\mathbf{x}}\mathcal{E} = mv$ . La singularaj punktoj de  $\mathcal{E}$  estas sekve ekvilibroj. La faza portreto akiriĝas per  $v(\mathbf{x}; e) = \pm\sqrt{2/m(e - \mathcal{V}(\mathbf{x}))}$ . Eskludita maksimume la punkto  $v = 0$  kiu povas estis tre neregulara. Oni kunigas do la kompono +a kun tiu -a kiuj estas simetriaj al la abscison. Laŭe  $e, \mathcal{J}_e$  kluas, aperas aŭ estas punkton. La rapidoj povus atingi aŭ ne la absciso.  $d_t\mathbf{x}_t = \sqrt{2/m(e - \mathcal{V}(\mathbf{x}))} \cdot \sqrt{2/m} \cdot d\mathbf{x}/\sqrt{e - \mathcal{V}(\mathbf{x})} = dt \quad t(\mathbf{x}) = t_0 + \sqrt{2m} \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} dx/\sqrt{e - \mathcal{V}(\mathbf{x})}$ : hora leĝo, ripetinte kun ĉiuj inversio-punktoj pro kiuj  $t \mapsto \mathbf{x}_t$  perdas la monotonon. **Periodo**

$$T(l) = \sqrt{2m} \int_{\mathbf{x}_+(e)}^{\mathbf{x}_-(e)} \frac{d\mathbf{x}}{\sqrt{e - \mathcal{V}(\mathbf{x})}}$$

Oni devas kalkuli la inversa de la potencialo  $e \mapsto \mathbf{x}(e)$ . **Ekvilibro Firma** se per ĉiuj proksimaĵo  $U$  de  $\underline{\mathbf{x}} \quad \exists U_0$  de  $\underline{\mathbf{x}} | \mathbf{x}_0 \in U \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in U \quad \forall t > 0$ . **Ekvilibro Nefirma** se ne estas firma kaj **Ekvilibro Asintota Firma** se  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) = \underline{\mathbf{x}}$ . Asintota firmeco kutimiĝas en disipaj sistemoj neeble por tiuj konservaj.

### 3.2.4 Metodoj Lyapunov-a

Oni utiligas funkcion, Lyapunov-an nomatan, por studi la ecoj de la ekvilibra proksimeco. Se  $L_{\mathbf{X}} \cdot \mathcal{W}(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x}_0$  firmas, se  $L_{\mathbf{X}} \cdot \mathcal{W}(\mathbf{x}) < 0$  do asintote firmas. La aroj de subniveletoj  $\{\mathcal{W}(\mathbf{x}) < c\} = \mathcal{W}_c$  formiĝas bazo de proksimaĵoj. Spektrala metodo: Oni ŝercas la aŭtovaloroj de la Jacobi-a de  $\mathbf{X} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X} \mathbf{x} \quad \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{X}(\mathbf{x})$ . Se ĉiuj aŭtovaloroj havas parto reala nea  $\mathbf{x}$  estas nefirma, se aŭtovaloro estas nula oni devas konsideri ankaŭ la termoj de pli grandaj gradoj.

### 3.2.5 Frenet-a Bazo

Arka parametro  $s \mapsto \gamma(s) \quad \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad |d_t\gamma(s)| = 1 \quad \forall s \in \mathbb{R}$ . **Frenet-a Bazo**:  $e_\tau = d_s\gamma, e_n = \rho d_s e_\tau$  per  $\rho := |d_s e_\tau(s)|$  kaj  $e_b = e_\tau \times e_n$ .  $\rho(s)$  normaligas  $d_s e_\tau$  kaj nomiĝas radio de ĉefa kurvado.  $\dot{\mathbf{x}} = \dot{s}e_\tau + \dot{s}d_t e_\tau = \dot{s}e_\tau + \dot{s}^2 d_s e_\tau = \dot{s}e_\tau + \dot{s}^2 d_\rho e_n$ . Newtown-a ekvacio  $m\ddot{s} = f_\tau(s, \dot{s}) + \Phi_t, m\dot{s}/\rho(s) = f_n(s, \dot{s}) + \Phi_n \quad 0 = f_b(s, \dot{s}) + \Phi_b$ . **Glata Ligilo**  $\Leftrightarrow \Phi_t = 0$ .

## 3.3 Lagrange-a Priskribo

Oni imaginas movantaj partikloj sur ligilo. La koordiantoj de la pozicio kaj rapido sur la varieco estu

$$\underline{\mathbf{g}} : (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N) \stackrel{\in \mathbb{R}^N}{\mapsto} (x_1, \dots, x_n) = \underline{\mathbf{x}} \\ = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)) \quad \underline{\dot{\mathbf{g}}} = \sum_i \sum_j \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} \cdot \dot{x}_j$$

kie  $n$  estas la dimensio de la varieco, minusa de  $N$ . La kinetika energio, kiu oni difinas kiel sole definika de kvara termoj de  $\underline{\dot{\mathbf{x}}}$  ĉar la aliaj partas al la **Potencialo Generaligita**  $\mathcal{U}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\dot{\mathbf{x}}}) := U_0(\underline{\mathbf{x}}) + U_1(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\dot{\mathbf{x}}}) + U_2(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\dot{\mathbf{x}}}^2)$ , estas do

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} m \quad {}^t \underline{\dot{\mathbf{x}}}_i \cdot \dot{\underline{\mathbf{x}}}_i \quad T = \frac{1}{2} m \quad \underline{\dot{\mathbf{g}}} \cdot \underline{\dot{\mathbf{g}}} = \frac{1}{2} \left( m \sum_i \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \frac{\partial f_j}{\partial x^i} \right) \dot{x}_i \dot{x}_j = \frac{1}{2} {}^t \underline{\dot{\mathbf{x}}} A \underline{\dot{\mathbf{x}}}$$

<Sfera Koordinatoj

$$\tilde{\mathbf{x}} = (x, y, z) \quad \mathbf{x} = (r, \phi, \theta) \quad \mathbf{g} = (r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta)$$

$$\dot{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta & -r \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta \\ \sin \theta & 0 & -r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

La determinato de la Jakobi-a esta  $|J| = r^2 \sin \theta$ .

$$\tilde{T} = 1/2m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad T = 1/2^t \dot{\mathbf{x}} A \dot{\mathbf{x}}$$

$$A = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

△  $T = 1/2m(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$  ke priviĝas la ortogonaleco de la polaraj koordinatoj. Oni introdukas la **Lagrange-a Kompono de la Ekcito**

$$\underline{\mathcal{L}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\dot{\mathbf{x}}}, t) := \underline{\mathbf{F}}(\underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{x}}), \underline{\dot{\mathbf{g}}}(\underline{\dot{\mathbf{x}}}), t) \frac{\partial \underline{\mathbf{g}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}}$$

Centra Kampo ▷ **|Akcelo**  $a = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{e}_\phi$ . (Centra Kampo)  $m(2\dot{r}\dot{\phi} - r\dot{\phi}^2) = -k/r^2, m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) = 0$ . Energio kinetika  $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}M\tilde{W}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\tilde{W}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  Komponoj Lagrange-a de la ekscito  $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$   $a_{i,j} = M\partial_{q_i}\tilde{X}\partial_{q_j}\tilde{X}$   $\mathcal{L}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = F(\tilde{X}(\mathbf{q}), \tilde{W}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), t) \cdot \partial_{q_i}\tilde{X}(\mathbf{q})$   $d_t\partial_{\dot{q}_i}T - \partial_{q_i}T = \mathcal{L}_i$   $\mathcal{L}_i = -\partial_{q_i}V$   $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ . Se la Lagrange-a ne sekvas de iu koordinato lia konjugita momento estas unua integrala.  $\dot{\mathbf{p}}_i = \partial_{q_i}L$ ,  $\partial_{q_i}L = 0$ ,  $\mathbf{p}_i = \text{const}$ . Oni finfine akiras la **Lagrange Euler-a Ekvacio**

$$d_t\partial_{\dot{q}}L - \partial_{q}L = 0 \quad (3.1)$$

Lagrange-a ekvivalenta  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \sum_{i=1}^N \partial_{q_i}F(\mathbf{q}, t)\dot{q}_i + \partial_tF(\mathbf{q}, t)$  kondukas al la sama Lagrange-a ekvacio kaj lia imaĝa kurbo  $t \mapsto \mathbf{q}(\gamma(t))$  estas solvado de la Lagrange-a ekvacio. Ia ekvilibra ekvacio estas pro  $\partial_{\dot{q}}V_0 = 0$ .

Th: **Th de Lagrange-Dirichlet:**

Per  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V_0(\mathbf{q}) - V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  temp-sendipenda, se  $V_0$  havas ia stringa minimo en punkto  $\mathbf{q}^*$ , do  $\mathbf{q}^*$  estas firma ekvilibra konfiguracio.

⊗ Se  $L$  estas temp-sendipenda la asintota firmeco estas neebla

### 3.3.1 Linearigo:

$A(\mathbf{q}^*) + V''(\mathbf{q}^*)(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) = 0$ . Laŭ ia Lagrange-a kiu havas en  $\mathbf{q}^*$  punkto de stringa ekvilibrio de  $V$  kaj sekve la Hesse-a  $V''(\mathbf{q}^*)$  plusa definitiva do la linearigaj aŭtovaloroj  $\Lambda\mathbf{q}^*$  estas pure imaĝaj kaj ne nulaĵaj kaj la linearigaj ekvacioj havas ĝenerala integralo  $\mathbf{q}(t; c, \delta) = \mathbf{q}^* + \sum_i c_i \cos(\omega_i t + \delta_i)\mathbf{u}_i$  nomiĝas normala aŭtovaloro de  $\Lambda(\mathbf{q}^*) = V'' - A\Lambda$ .  $L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}A\dot{\mathbf{q}} - V(\mathbf{q})$ . Linearige

$$A(\mathbf{q}^*)\ddot{\mathbf{q}} + V''(\mathbf{q}^*)(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) = 0 \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0_n & \mathbb{I}_n \\ -A^{-1}V'' & 0_n \end{pmatrix}$$

pro  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  aŭtovaloroj de  $A^{-1}V''$ . La aŭtovaloroj de  $\Lambda$  estas

$$\omega_{1\pm} = \sqrt{\pm(-\lambda_i)} \quad \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \Lambda(\mathbf{q}^*) \begin{pmatrix} \mathbf{q} - \mathbf{q}^* \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

Ĉar la Hesse-a estas plusa definitiva  $\omega_1 = \pm\sqrt{-\lambda_1}, \omega_n = \pm\sqrt{-\lambda_n}$   $\mathbf{q}(t; c, \delta) = \mathbf{q}^* + \sum_i c_i \cos(\omega_i t + \delta_i)\mathbf{u}_i$  pro  $\mathbf{u}_i$  aŭ tovektoroj de  $A^{-1}(\mathbf{q}^*)V''(\mathbf{q}^*)$ .  $V'' - \lambda A$  oni permesas ne kalkoli la inversa de  $A$ . Ia Lagrange-a pro  $n = 2$ : se  $\omega_1/\omega_2$  estas racionala lia movoj estas periodaj se neracionala neniu movo estas perioda. Se  $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{Q}$  nomiĝas resonanta. Se la oscilatoro estas ne risonanta la nivelaĵoj de la dua funkcioj  $E_1(q_1, \dot{q}_1) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1^2)$   $E_2(q_2, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}(\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2^2)$  estas densaj en la toro.

### 3.4 Variacionalaj ecoj

**|Akcio|** oni diras ke ia diferencala mapo  $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $\mathbf{q}, \alpha \mapsto \phi(\mathbf{q}, \alpha) := \phi_\alpha(\mathbf{q})$ ) estas akciono de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}^n$  se I)  $\phi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  estas identeco II)  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \phi_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  estas difeomora III)  $\forall \alpha, \beta \quad \phi_{\alpha, \beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta$ . Generatoro infinitezima de la akcio  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) := \partial_\alpha \phi(\mathbf{q}, 0)$ . La akcioj estas ekzemple la rototraslacioj kaj la fluksoj. La Lagrange-a estas invarianta sub la akcio de  $L(\phi_\alpha(\mathbf{q}), \partial_q \phi_\alpha(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  kie  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto (\phi_\alpha(\mathbf{q}), \partial_q \phi_\alpha(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}})$  estas la levo de la akcio al la tanĝa fibro.

#### Noether-a

Th:

Nöther-a Se la Lagrange-a  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  estas nevarianta sub la akcio de  $\phi$  nu la

Lagrange-a ekvacioj havas unua integralo  $I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \sum_n^{j=i} \boldsymbol{\xi}_j(\mathbf{q}) p_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  kie  $\boldsymbol{\xi}$  estas la infinitezima generatoro kaj  $p_j = \partial_{\dot{q}_j} L$  estas la momento koniugata al  $q_j$ .  $\otimes$

La ignorebla koordinato estas longe la orbitoj de la akcio. Rouht-a redukcio  $\partial_{\dot{\boldsymbol{\xi}}} \pi = \partial_{\dot{\boldsymbol{\xi}}} \partial_{\dot{\boldsymbol{\xi}}} L \neq 0 \Rightarrow \pi(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) = c \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = u(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \pi)$

$$L_c^R(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) := (L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) - c\dot{\boldsymbol{\xi}})|_{\dot{\boldsymbol{\xi}}=u(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, c)}$$

Ia funkcionalo de nefina dimensionala spaco estas derivebla laŭ Gateaux en ia punkto  $\gamma \in \Gamma$  se la derivaĵo  $d_\lambda J[\gamma + \lambda \eta] \in \mathbb{R}$  ekzistas  $\forall \eta \in \Gamma_0$ . Tia derivaĵo nomiĝas **|Variacio|** aŭ **|Gateaux Derivaĵo|** de  $J$  en  $\gamma$  en la direkcio de  $\eta$ .  $\gamma$  estas stacionara se la variaĵo de  $J[\gamma]$  nulas. Hamilton-a principo: estas  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciebla funkcio,  $\gamma$  igas stacionara la funkcionala  $J_L$  sse estas solukcio de la ekvacioj  $d_t \partial_q L - \partial_q L = 0$  de Euler-Lagrange. **|Akcia Funkcionala|** asociita al  $L$

$$J_L[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt$$

Longeco de ia kurbo:  $l[\tilde{\gamma}] = \int_{t_0}^{t_1} |d_t \tilde{\gamma}(t)| dt$ . Ia geodetiko igas stacionara la longenco inter du punktoj. **|Metrika Matricio|**  $g_{ij} = \partial_{q_i} \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{q}) \partial_{q_j} \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{q})$ .  $G(\mathbf{q})$  plusa definita. **|Geodetiko|**  $\tau(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}} G(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ . Neĉeeste aktivaj forcoj la movoj de ia punkto ligata sekvas la geodetiko.

### 3.5 Hamilton-a Mekaniko

$U$  aperto de  $\mathbb{R}^n$  de koordinatoj  $(\underline{\mathbf{p}}, \underline{\mathbf{q}})$  funkcias regole  $u \rightarrow \mathbb{R}^n$ . La **|Hamilton-a Sistemo|** de Hamilton-a  $H$  de  $2n$  ordinara ekvacioj diferencialaj

$$\dot{\underline{\mathbf{p}}} = -\partial_{\underline{\mathbf{q}}} H \quad \dot{\underline{\mathbf{q}}} = \partial_{\underline{\mathbf{p}}} H \quad (3.2)$$

$\underline{\mathbf{q}}$  estas la koordinato posicio dume  $\underline{\mathbf{p}}$  estas tia impulso.  $n$  numeras de la gradoj de libero dume  $U$  estas la faza spaco, la flukso  $\Phi$  grupas en aŭtonoma sistemo. Se  $\check{x}(t)$  estas parta solvado de la ekvacio  $\check{x}(t+s) = \check{x}'(t)$ .

#### Liouville-a

Th:

La flukso plitenas la mizuro de Lebesgue en la faza spaco. Se la sistemo estas aŭtonoma konserviĝas la energio  $d_t H = 0$

$$H(\Phi_H^t(\underline{\mathbf{p}}, \underline{\mathbf{q}})) = H(\underline{\mathbf{p}}, \underline{\mathbf{q}}) \quad (3.3)$$

kaj energaj surfacoj estas nevariantaj  $S_\mathcal{E} = \{(\underline{\mathbf{p}}, \underline{\mathbf{q}}) \in U | H(\underline{\mathbf{p}}, \underline{\mathbf{q}}) = \mathcal{E}\}$   $\otimes$

ĝenere

$$d_t H = \partial_t H \quad (3.4)$$

Sistemo na aŭtonoma prezentigebla per sistemo aŭtonoma de  $n + 1$  gradoj de libero enponi variablon kiu parigi la koordinata numero.

[Legendre-a Trasformaĵoj]

$$\underline{\mathbf{p}}(\underline{\mathbf{q}}, \underline{\dot{\mathbf{q}}}) = \partial_{\underline{\dot{\mathbf{q}}}} L \quad H(\underline{\mathbf{p}}, \underline{\mathbf{q}}) = \underline{\mathbf{p}} \cdot \underline{\dot{\mathbf{q}}}(\underline{\mathbf{p}}, \underline{\mathbf{q}}) - L(\underline{\dot{\mathbf{q}}}(\underline{\mathbf{p}}, \underline{\mathbf{q}}), \underline{\mathbf{p}}) \quad (3.5)$$

En la Hamilton-a mekaniko

$$\dot{f} = \{f, H\} = \left. d_t \Phi_H^t(\underline{\mathbf{p}}, \underline{\mathbf{q}}) \right|_{t=0} = \partial_{\underline{\mathbf{p}}} \dot{\mathbf{p}} + \partial_{\underline{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}}$$

aŭ ĝenere  $\dot{f} = \{f, H\} + \partial_t f$  [Lie-a Derivaĵo]

$$\hat{\mathcal{L}}_{X, f} = \{, f\}$$

### Trasformaĵoj Kanonikaj

En Lagrange-a mekaniko transformaĵoj estas punktualaj  $q_i = q_i(\tilde{q}, t)$  dume  $\dot{q}^i = \partial_{\tilde{q}^i} \dot{q}^i \cdot \tilde{\dot{q}} + \partial_t \dot{q}^i$   $\tilde{L}(\tilde{q}, \tilde{\dot{q}}, t) = L(q(\tilde{q}, t), \dot{q}(\tilde{\dot{q}}))$ . Trasformaĵoj de koordinatoj:  $(\underline{\mathbf{p}}, \underline{\mathbf{q}}) = w(\underline{\tilde{\mathbf{p}}}, \underline{\tilde{\mathbf{q}}})$   
 $w : \tilde{U} \rightarrow U$ .  $X_H$  vektora kampo asociita al Hamilton-a  $H$

$$X_H = (-\partial_{\underline{\mathbf{q}}} H, \partial_{\underline{\mathbf{p}}} H) = \mathbb{E} \partial_x H$$

$$\text{tie } x = (\underline{\mathbf{p}}, \underline{\mathbf{q}}), \mathbb{E} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{H} = H \circ w \quad \tilde{H}(\underline{\tilde{\mathbf{p}}}, \underline{\tilde{\mathbf{q}}}) = H(w(\underline{\tilde{\mathbf{p}}}, \underline{\tilde{\mathbf{q}}}))$$

Trasformigas oni  $H$  kaj sekve transformagas funkcioj transformataj. Do  $\Phi_H^t \circ w = w \circ \Phi_{\tilde{H}}^t$   
 $\Phi_{\tilde{H}} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ . Ekzistas diversaj modoj de verifiki kiam transformo estas strekte kanona aŭ Hamilton-a feras al saman ekvacion.

$$\text{I } X_H \circ w = J X_{\tilde{H}}$$

$$\text{II } \text{Trasformaĵoj simplektikaj } J^{-1} \mathbb{E} J = \mathbb{E}$$

$$\text{III } \text{Konservu la [parentesi] Poison-a } \{u_i, v_j\} = \delta_{ij}$$

$$\text{IV } \text{Lie-a kondico } pdq = \tilde{p}d\tilde{q} + df \text{ kiam la unuformo de Liuville } pdq \text{ estas ekzakta.}$$

I)  $\tilde{H} = H \circ w$   $\partial_x = J \partial_{\tilde{x}}$   $\partial_x \tilde{H} = \partial_x H \circ w$   $X_H \circ w = J X_{\tilde{H}}$  II)  $\tilde{X}_H = X_{\tilde{H}}$   
 $X_H = \mathbb{E} \partial_x H$   $\partial_x \tilde{H} = J \partial_x H$   $J^{-1} X_H \circ w = \mathbb{E} \partial_x \tilde{H} = \mathbb{E}^t J \partial_x H \circ w$ . La transformaĵoj  
 ne strkte kanonaj havas la samaj Hamilton-aj ekvacioj sed ne plu valoras  $\tilde{H}(\underline{\tilde{\mathbf{p}}}, \underline{\tilde{\mathbf{q}}}) =$   
 Polaraj Koordinatoj  $H(\underline{\mathbf{p}}, \underline{\mathbf{q}}) \circ w$ .

La transformaĵo  $(\underline{\mathbf{p}}, \underline{\mathbf{q}}) \mapsto (\underline{\mathbf{r}} \cos \phi, \underline{\mathbf{r}} \sin \phi)$  ne estas kanona ĉar ne respondas al la kondicon supre. Oni do konstruas kanonan ian  $(\underline{\mathbf{p}}, \underline{\mathbf{q}}) \mapsto (\sqrt{2\underline{\mathbf{I}}\omega} \cos \phi, \sqrt{2\underline{\mathbf{I}}/\omega} \sin \phi)$ .  
 En la armonika oscilatoro la Hamilton-a simpligaĝas  $\tilde{H} = I$  kaj la elikso de la faza  
 $\triangle$  spaco fariĝas cirklo.

### 3.5.1 Funkcio Ĝenerila

Oni uzas metodo pli simple por akiri la ecojn de la transformzĵoj; tiu metodo simplifikas la kalkuloj ĉar ne uzas la transformaj funkcio de koordinatoj.

Oni povas uzi iu fukcio  $S(q, \tilde{q})$  per kiu se valoras la invertibleca kondico  $\partial_q \partial_{\tilde{q}} S \neq 0$  kaj  $p = \partial_q S$   $\tilde{p} = -\partial_{\tilde{q}} S$  definas transformaĵon loka  $w : (p, q) \mapsto (\tilde{p}, \tilde{q})$ .



Simile valoras  $S(\tilde{p}, q)$  kiu defininas iu transformajiĝo kanona  $w : (p, q) \mapsto (\tilde{p}, \tilde{q})$ .

La probo de la kanoneco estas pravita de la kondico Lie-a montrita per la identeco

Gxenerila  $\partial_q S(q, \tilde{q})dq + \partial_{\tilde{q}} S(q, \tilde{q})d\tilde{q} = dS(q, \tilde{q})$  sciante ke  $q = v(\tilde{p}, \tilde{q})$ .

$$\Delta \begin{matrix} \underline{q} = A(\tilde{q}) & \underline{p} = u(\tilde{p}, \tilde{q}) & u(\underline{p}, \underline{q})A(\tilde{q})d\tilde{q} - \tilde{p}d\tilde{q} =! df & ({}^t Au - \tilde{p}) =! df & {}^t Ap - \tilde{p} = \\ a(\tilde{q}) & p = {}^t A^{-1}(\tilde{p} + a(\tilde{q})) & & & \end{matrix}$$

Al oni graviĝas la transformajiĝoj kiuj estas proksime al la identeco aŭ la identeco pli perturbacio  $S(\tilde{p}, \tilde{q}) = \tilde{p}\tilde{q} + \epsilon S(\tilde{p}, \tilde{p}, \epsilon)$

### 3.6 Perturbata Metodo

En la Hamilton-a kazo

## Capitolo 4

# Malvasta Relativeco

### 4.1 Geometrio

Poste la dekovro de Michelson-Morley [1887] ke la lumo havas la saman rapidecon en ĉiuj refer rilatoj la koncepto de geometrio ŝanĝis ĉar estis grava korektigi la leĝojn pro rapidecoj kiu estas afektigitaj pro tiu korektado:  $v > c/7(10\%)$ .

Oni devas konsideri kiu la spaco kaj la tempo ne estas la samaj por ĉiuj observatoroj sed la unika grandeco konserviganta estas la spac tempa intervalo. Oni plitenas la postulo de omoĝena kaj isotropa spaco kaj oni volas pliteni la Newton-a leĝoj sed en tiuj kondicoj la fizikaj leĝoj transformiĝas per diversaj transformaĝoj.

Oni devas nun defini ia laŭcela metriko.

#### 4.1.1 Mat: Metriko

Mat

La skalara produkto inter du vektoroj estas la produkto de la komponoj |**kontraŭvarianta**|j de la bazo  $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$  kaj tiuj |**kovarianta**|j de la reciproka bazo  $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ . La vektoroj kontraŭvariantaj transformiĝas en kovariantaj laŭ la relacio

$$v^i = g^{ij}v_j$$

kie kiam du simbolik indicoj (unu konvarianta, la alia kontraŭvarianta) estas ripetitaj oni intendas la sumo de ĉiuj komponoj fine la saturigo de indico. Ia matrico estas prezentita per  $\Lambda^\mu_\nu$  kie la proksima indico  $\mu$  estas la numero de la rigo dume la malproksima  $\nu$  la kolono  $M \cdot N = M^\mu_\nu N^\nu_\rho = O^\mu_\rho$ . La indicoj ripetitaj saturigas:  $\Lambda^\mu_\nu v^\nu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu_\nu v^\nu = v^\mu$ . Ĉi tiu esprimas la |**Einstein-a Konvencio**|n. Kie oni skribas  $\Lambda^\mu_\nu$  oni intendas ke la indekso maldekstre referas la rigoj kiam tiu dekstre referas la kolonoj. Ia ĝenera metriko estas prezentita per:

$$G = g_{\mu\nu} \quad G^{-1} = g^{\mu\nu} \quad (GG^{-1})^\mu_\nu = g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \sum_\rho g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$$

|**Matrica Notacio**|

$$g_{\mu\nu} = G \quad x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad {}^t x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad \Lambda = \Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \dots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

La terminoj  $g_{\mu\nu}$  estas la aplikajo bilineara asociita al ia metriko. En la ordinara vektora spaco la metriko estas difinita  $g_{il} = \delta_{il}$  |**Kroneker-a  $\delta$** | aŭ la identeco  $\mathbb{I}$ . La tensora produkto konsideras la transformaĵojn laŭ la propra metriko. La distanco

segmeto estas  $\sqrt{ds^2}$  aŭ

$$|ds|^2 = ds^\mu \cdot ds_\mu = \begin{pmatrix} ds^0 & ds^1 & ds^2 & ds^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{01} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{02} & g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{03} & g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ds^0 \\ ds^1 \\ ds^2 \\ ds^3 \end{pmatrix}$$

kie  $g_{12} = g_{21} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1$ . Se  $\cos(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) / |\mathbf{a}_1| |\mathbf{a}_2| = 0$   $g_{i \neq j} = 0$ .  
Se  $\mathbf{a}_i$  estas la bazo per la ordinaraj vektoroj kun  $x^i$  siaj komponoj tiele ke  $\mathbf{x} = a_i x^i$   
kaj  $u^i$  sistemo de koordinatoj, ia bazo povas esti prezentita per

$$a_i = \frac{\partial x_l}{\partial u^i} \mathbf{x}_l \quad g_{ij} = g_{ji} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \frac{\partial x^l}{\partial u^i} \frac{\partial x^m}{\partial u^j} \mathbf{x}_l \mathbf{x}_m = \frac{\partial x^l}{\partial u^i} \frac{\partial x^l}{\partial u^j}$$

kie  $g_{il}$  estas la **|Gram-a Koeficiento|**. La Gram-a koeficiento povas esti vidita kiel

$$g_{21} = g_{12} = \sqrt{g_{11}g_{22}} \cos(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \quad g_{11} = \left( \frac{d\mathbf{r}_{u_1, u_1 + du_1}}{du^i} \right) = |\mathbf{a}_1|^2$$

ds nomiĝas **|Intervalo Spac Tempa|** kaj estas la mizuro inter du **|Evento|**:  
fenomenoj kiuj alvenas en certa punkto de la spaco en la rilato  $S$  de koordinatoj  
( $x^1, x^2, x^3$ ) =  $x^i$  en ia tempo en la spaco ( $x^0, x^1, x^2, x^3$ ) =  $x^\mu$ . La intervalo de la  
luma radio estas la unika isotropa vektoro  $(ds)^2 = 0$ . Radio kiu moviĝas tra  $\hat{e}_x$  havas  
 $dx^2 = dx^3 = 0$   $(ds)^2 = 0 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{01}dx^0dx^1 + g_{11}(dx^1)^2$ .  $c = dx^0/dt$  ( $g_{00} +$   
 $2g_{01} + g_{11})dx^0 = 0$ . Se la lumo propadiĝas kontraŭe (tra  $-\hat{e}_x$ )  $(g_{00} - 2g_{01} + g_{11})dx^0 = 0$ .  
Suminte kaj subtrahinte la du ekvacioj oni obetenas  $g_{00} = -g_{01}$   $g_{01} = 0$ .

√

Aldone:  $dx^0 = cdt = dx^1$ 

- Pro isotropio de la spaco  $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33}$  kaj  $g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0$ .

- Pro ortogonaleco de la spaca bazo  $g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0$

Ĝenera lum radio havas

$$(ds')^2 = 0 = \sum_{\mu\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00} ds^2 + \sum_{\mu \neq \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00} (ds)^2$$

$g_{00}$  pro la omogeno de la spac tempo depenas de la rapideco inter du rilatoj sed pro  
isotropio ne dependas de  $x$  sekve, de la direcio de la rapideco, sole  $|v^\mu|$ .  $(ds')^2 =$   
 $g_{00}(|v^\mu|)(ds)^2$  kontraŭe  $(ds')^2 g_{00} = (|v^\mu|)(ds)^2$  do  $g_{00}$  unuas.

### Spac Tempa Intervalo

La spac tempa intervalo nevariantas por transformajoj inter rilatoj inerciaj  
 $(ds')^2 = (ds)^2$ .

Th:

⊗

Nun oni povas defini la **|Minkovskij-a Metriko|**

$$G = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Inter du rilatoj  $S$  kaj  $S'$   $(ds)^2 = (ds')^2$ . La spaca transformajoj  $\in SO_2$  estas

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

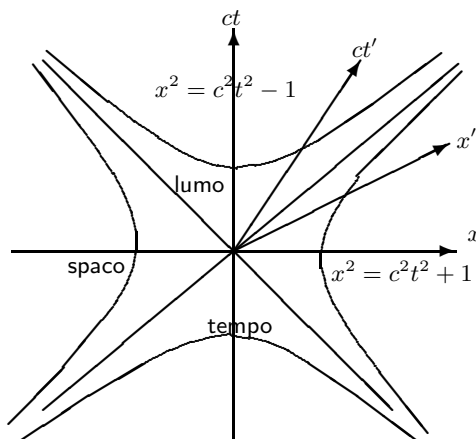
si oni ponas  $x^0 = ix^4$  kaj  $(ds)^2 = -\sum_{i=1}^4 (dx^i)^2$  la lineara transformajoj tra  $\hat{e}_x$  per fiksa  
tempo kaj spaco

$$x^1 = \cos \phi x^4 + \sin \phi x^1 \quad x^0 = -\sin \phi x^4 + \cos \phi x^1 \quad (x'^0)^2 - (x'^1)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2$$

Per la relacioj  $\cos \phi = Ch\phi$   $\sin \phi = \iota Sh\phi$ . Nun  $\iota x'^0 = Ch\theta \iota x^0 + \iota Sh\theta x^1$   $x^1 = \theta = \iota\phi$   
 $\iota Sh\theta \iota x^0 + Ch\theta x^1$ . Uzinte  $x^1 = \beta x^0$   $x^1/x^0 = -\beta = Sh\theta/Ch\theta$ . Per  $Ch^2\theta - Sh^2\theta = 1$  Per  $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$   
 $1 - Th^2\theta = 1/Ch\theta$

$$Ch\theta = \gamma \quad Sh\theta = Th\theta Sh\theta = -\beta\gamma$$

do la |Lorentz-aj Trasformaĵoj| estas



$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Trasformaĵoj inter du movaj rilatoj estas priskribita en iperbola spaco dume en statikaj laŭe la bone notita transformaĵo cirkla.

### 4.1.2 Grupo Lorentz Poincaré-a

#### 4.1.3 Mat: Grupo

Mat

La |Grupo| estas ia aro  $\mathcal{G}$  donita de

- Leĝo de interna asocia kompono:  $\diamond$
- Malfermeco: se  $g_1, g_2 \in \mathcal{G} \Rightarrow g_1 \diamond g_2 \in \mathcal{G}$
- Identeco:  $\mathbb{I} \in \mathcal{G}$
- Inversa ene en  $\mathcal{G}$  por ĉiu elemento de  $G$ :  $g, g^{-1} \in G \quad g \diamond g^{-1} = \mathbb{I} \in G$

✓

La Poincaré-a grupo transformigas vektoron por translacioj kaj rotacioj aplikante la Lorentz-aj transformaĵoj kaj translacio.

$$\hat{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

Oni povas fari ion da alĝebro kun la Lorentz-aj matricoj

$$\hat{\Lambda} = G\Lambda G_1 = g_{\mu\rho} \Lambda^\rho_\sigma g^{\sigma\nu} = \Lambda_\mu^\nu = \hat{\Lambda}^\mu_\nu \quad \Lambda^\mu_\nu \Lambda^\nu_\sigma = \delta_{\mu\sigma}$$

$$\tilde{\Lambda}G\Lambda = G = \Lambda_\mu^\nu g_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma_\mu = g_{\mu\nu} \quad (\Lambda^\mu_\nu)^{-1} = \Lambda_\nu^\mu$$

La duplo  $\{\Lambda, a\}$  difinas la grupon kiu havas sian komponan leĝon  $\{\Lambda_1, a_1\} \circ \{\Lambda_2, a_2\} = \{\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_1 a_1 + a_2\}$  kaj sian neŭtran eron  $\{\mathbb{I}, 0\}$ . Si oni ponas  $a^\mu = 0$  oni havas la Lorentz-an grupon. De la relacio  $\det G' = \det({}^t\Lambda G\Lambda) = \det^2 \Lambda \det G$  oni havas

$\det^2 \Lambda = 1 \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1$ . Oni vastigas la Lorentz-an grupon en kvar komponoj konektitaj laŭ *I*)  $\mathcal{L}_+^\uparrow := \{\Lambda | \det \Lambda = 1, g_{00} = 1\}$  (nomata la Lorentz-a propra grupo *II*)  $\mathcal{L}_+^\downarrow := \{\Lambda | \det \Lambda = 1, g_{00} = -1\}$  *III*)  $\mathcal{L}_-^\uparrow := \{\Lambda | \det \Lambda = -1, g_{00} = 1\}$  *IV*)  $\mathcal{L}_-^\downarrow := \{\Lambda | \det \Lambda = -1, g_{00} = -1\}$ . Por ekzemplo estas gravaj la matricoj de (Pareco)  $\in \mathcal{L}_-^\uparrow$  kaj de (Tempa Nevariacio)  $\in \mathcal{L}_-^\downarrow$

Tempa Nevariacio▷

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

tiu ke  $PT = -\mathbb{I}$  Empirike ekzistas sole la konservo de *CPT* ĉar la fizik leĝoj ne estas nevariantaj por tempa translacio kaj pareco (violacio de Lee-Young [1957]). La fizik leĝoj estas nevariantaj sole per la Poincaré-a propra grupo.

### Kvargrandecoj

Kvarskalara:  $\phi'(x') = \phi(x) \phi(\Lambda^{-1}(x' - a))$ . La kvarvektoro  $A'^\mu = \lambda^\mu_\nu A^\nu$  povas esti kontraŭvarianta kaj kovarianta  $A'_\mu = \hat{\Lambda}^\nu_\mu A_\nu$   $\hat{\Lambda}^\nu_\mu = g_{\mu\rho} \Lambda^\rho_\sigma g^{\sigma\nu}$ .  $A'^\mu(x) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}(x - a))$ . Iu kvarskalara ne ŝanĝas sub Poincaré-a transformiĝoj. Pseŭd tensoro de unua speco  $T \mapsto \det(\Lambda) \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma T^{\rho\sigma}$  Pseŭdo tensoroj de dua speco  $T \mapsto \text{sgn}(\Lambda^\mu_\rho) \text{sgn}(\Lambda^\nu_\sigma) \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma T^{\rho\sigma}$   $A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu$  kvar skalara  $\partial_\mu$  kvargradiento kovarianta  $\partial'_i \phi'(x') = \hat{\Lambda}_i^j \partial_j \phi(x)$  La ekvacioj en la tensora [formalismo] diriĝas kontraŭvariantaj al vido.

### Spac Tempo Ecoj

La trajektoro en la spaca tempo estas  $x^\mu(\tau)$  kie  $\tau$  estas la propra tempo de la sistemo.  $ds = \sqrt{1 - \beta^2}$  estas nevarianta per translacioj. Oni volas obteni la rapideco  $u^\mu = d_s x^\mu = (c, v_x, v_y, v_z) \gamma$  kiu estas kvar veltoro ĉar  $ds$  estas nevarianta kaj  $x^\mu$  kvarvektoro. De la relacio  $cdt = x$  oni trovos ĉiam komponanton depenan. Si oni volas trovi la kvar akcelerado

$$c^2 a^\mu = d_s u^\mu = \frac{d^2}{ds^2} x^\mu = \gamma d_t \left( (c, v_x, v_y, v_z) \gamma \right)$$

Pluen  $u^\nu u_\mu = d_s x^\mu d_s x_\nu = d_s s = 1$   $d_s(u^\mu u_\mu) = d_s 1 = 0 = d_s u^\mu u_\mu + u^\mu d_s u_\mu$   
 $\Rightarrow a^\mu u_\mu + u^\mu a_\mu = 0$ . La kvarimpulso  $p^\mu = cmu^\mu$

$$p^0 = m\gamma c = \frac{mc}{\sqrt{1 - \beta^2}} \stackrel{\text{Taylor}}{=} mc \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right) \right) = \frac{mc^2}{c} + \frac{1}{2} m \frac{v^2}{c}$$

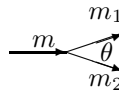
$p^0 c$  estas malegala al la kinetika energio per  $mc^2$  kiu ne povas elmeti ĉar tiu komponanto devas esti ne variata per Poincaré-a transformiĝoj kaj en la procesoj inter izolitaj sistemoj la relativeca energio ĉiam konserviĝas.  $mc^2$  povas transformiĝi en energio. Kvarforco  $F^\mu = mc^2 a^\mu$ . Oni povas vidi ke  $F^\mu u_\mu = 0$  do la energio konserviĝas se la eksternaj forcoj estas nulaj.  $d_t \mathcal{E} = \mathbf{F} \mathbf{v}$   $F^0 = F^i v_i$   $F^0 = 0$  se  $F^i = 0$ .

## 4.2 Procesoj en Relativeca Mekaniko

### 4.2.1 Kvar impulso

Defalo

$$m \rightarrow m_1 + m_2$$



kvar impulso  $p^\mu$ . Oni povas konstrui ian nevarianton:  $p^\mu p_\mu = m^2 c^2$   $\dot{p}_1^\mu p_{2\mu} =$

$\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 / c^2 = \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2$  nevarianta. En la rilato en kiu  $m_1$  estas ferma  $\mathcal{E} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$   
 $p_1^\mu p_{2\mu} = 1/c^2 \cdot m_1 c^2 \sqrt{m_2^2 c^4 + p_2^2 c^2} = p_1^\mu p_{2\mu} = m_1 \sqrt{m_2^2 c^4 + c^2 p_2^2} \geq m_1 m_2 c^2$ . La masa  $A^\mu B_\mu = AB$   
 centro estas laŭ difino la rilato pro kiu  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ . Ĉi tiu rilato estas ĉiam alirebla.  
 Se  $V^\mu$  kun la eco  $V^\mu V_\mu \geq 0 \exists S | \mathbf{V} = 0$ . Oni orietntas la aksoj pro ke  $\mathbf{V} = (V_x, 0, 0) \Rightarrow$   
 $V_0^2 - V_x^2 = 0 \Rightarrow |v_x/v_0| = 1$ . Oni realigas Lorentz-a transformo  $\xi = v_x/v_0 \quad v' = (v_0, \mathbf{0})$   
 $\gamma = 0 \quad (p_1 + p_2)_*^2 = \dagger^*$  rilate la masa centro  $\dagger = 1/c^2(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)_*^2 - (\zeta_1 + \zeta_2)_*^2 c^2$ . Ĉar la  
 sistemo estas izolita

$$p^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu, \quad (4.1)$$

$0 = g^\mu = d_t p^\mu = 0 \quad \sqrt{(p_1 + p_2)^2}$  moniĝas nevarianta maso.  $(p_1 + p_2)_*^2 = 1/c(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)_*^2$   
 $\mathcal{E}_{1*} = \sqrt{c^2 p_{1*}^2 + m_1^2 c^4} \quad (p_1^2 + p_2^2)^2 = (m_1 + m_2)^2 c^4 \quad p^2 = m^2 c^2 \Rightarrow m \geq m_1 + m_2$ . Partiklaj energio en la masa centro.  $mc = 1/c(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)_* = 1/c(\sqrt{m_1^2 c^4 + p_1^2 c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + p_2^2 c^2})_*$   
 $= (mc - \sqrt{p_1^2 + m_1^2 c^2})^2 = (m_2^2 c^2 + p_1^2) \quad m^2 c^2 - 2mc\mathcal{E}_1/c + \mathbf{p}^2 + m_1^2 c^2 + \mathbf{p}^2 + m_1^2 c^2 + \mathbf{p}^2 \Rightarrow$

$$\mathcal{E}_1 = c^2 \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m}, \quad (4.2)$$

$\mathcal{E}_2 = c^2(m^2 + m_2^2 - m_1^2)/2m$ ,  $|\mathbf{p}|_* = 1/c\sqrt{\mathcal{E}_{* \alpha}^2 - m_\alpha^2 c^4} = c^2/4m((m^2 + m_1^2 - m_2^2) - 4m_1 m_2)$ . Ne eblas determini la valoro  $\theta$ . Rilato en la laboratorio  $S$ , en la masa centro  $S_*$ .  $\mathcal{E}_{* \alpha} = c^2(M + m_2^2 - m_1^2)/2m \quad |\mathbf{p}|_* = \sqrt{\mathcal{E}_{* \alpha}^2 - m_\alpha^2 c^2}$ . En la laboartorio la eblaj valoroj de la impulso estas denterminonta.  $M$  moviĝas kun rapideco  $\mathbf{v}$

$$\mathcal{E}_m = \gamma mc^2. \quad (4.3)$$

Oni orientas la aksojn  $(x, y)$  en kiuj plano iĝas la defalo tra  $\mathbf{v}$ . La laboratorio moviĝas kun rapideco  $-\mathbf{v}$  rilate la masa centro.  $\mathbf{p}_{*c} \quad \mathbf{p}_{* \alpha x} = p_* \cos(\theta_{* \alpha}) \quad \mathbf{p}_{* \alpha y} = p_* \sin(\theta_{* \alpha})$   
 $\mathcal{E}_\alpha = \gamma(\mathcal{E}_{* \alpha} + V/p_{* \alpha x}) = \gamma(\mathcal{E}_{* \alpha} + V p_* \cos(\theta_{* \alpha})) \quad p_{\alpha x} = \gamma(p_{* \alpha x} + \beta/c \mathcal{E}_{* \alpha}) = \gamma(p_* \cos \theta_{* \alpha}) + \beta/c \mathcal{E}_{* \alpha}$   
 $p_{\alpha y} = p_{* \alpha y} = p_* \sin \theta_{* \alpha} \quad p_{\alpha z} = p_{* \alpha z} = 0$ . La unika nekonata estas  $\theta'_\alpha$ . Por determini la relazion inter  $\theta'_\alpha$  kaj konataĵoj uziĝas

$$\left(\frac{p_{\alpha x}}{\gamma} - \frac{\beta}{c} \mathcal{E}_{* \alpha}\right)^2 = p_{* \alpha}^2 \cos^2 \theta_* \quad p_{\alpha y} = p_* \sin \theta_* \quad (4.4)$$



do oni akiras al ekvacio de la elikso per la variantaj  $(p_x, p_y) \quad p_{\alpha x}/\gamma - \beta/c \mathcal{E}_{* \alpha}^2 + p_{\alpha y}^2 = p_{* \alpha}^2$  aŭ

$$\frac{1}{\gamma^2 p_*^2} (p_{\alpha x} - \gamma \frac{\beta}{c} \mathcal{E}_{* \alpha})^2 + \left(\frac{p_{\alpha y}}{p_*}\right)^2 = 1 \quad (4.5)$$

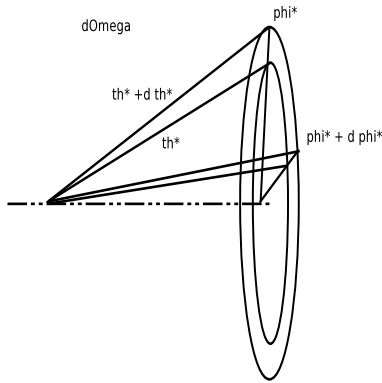
kiu provizas la valoron de la centro ( $d = \beta/c \mathcal{E}_{* \alpha} \gamma$ , 0) kaj la maksimuma angulo pro kiu la partikloj ne povas pluiri

$$d = \frac{\beta}{c} \gamma \mathcal{E}_{* \alpha} > s_x = \gamma p_* \quad \beta > \frac{c p_*}{\mathcal{E}_{* \alpha}} = \frac{v_{* \alpha}}{c}. \quad (4.6)$$

## Angulo

### Distribuo de Energio por la Partiklo de Defalo

$N$  Partikloj, defalas  $\Delta N$  por energioj inter  $\mathcal{E}$  kaj  $\mathcal{E} + \Delta \mathcal{E}$ .



$dN \rightarrow \mathcal{E}, \mathcal{E} + d\mathcal{E}$  havas sia funkcio relativa  $dN/N(\mathcal{E}) = d\chi(\mathcal{E})$   $\rho(\mathcal{E}) = d_{\mathcal{E}}\chi(\mathcal{E})$   $\rho d\mathcal{E}$  frakcio de la partikloj kun origino en la laboratorio inter  $\mathcal{E}, \mathcal{E} + d\mathcal{E}$ .

En la masa centro la probablo de transigo  $d\Omega$   $\phi_*, \phi_* + d\phi_*$   $\theta_*, \theta_* + d\theta_*$  estas nedipenda de  $\theta_*$  kaj  $\phi_*$   $d\chi = d\Omega/\Omega_{tot} = d\Omega/4\pi$ .

$d\chi = q/4\pi d\phi_* d \cos \theta_*$   $d\chi = \frac{1}{2} d \cos \theta_*$   $\theta_*(\mathcal{E})$   
 $\mathcal{E} = \gamma(\mathcal{E}_* + c\beta p_* \cos \theta_*)$   $\mathcal{E}_*, p_*, \beta$  kostanta.

Diferenciante  $d\mathcal{E} = c\beta\gamma p_* \cos \theta_*$   $\rho(\mathcal{E}) = d_{\mathcal{E}}\chi = d \cos \theta_* \chi(\theta_*) / (c\beta\gamma p_*)$  per rotacia nevarianco oni povas integrigas en  $\phi_*$ .

En tiu ĉi kazo estas nedipenda de  $\mathcal{E}$ . Ĉar

$$\int_{\mathcal{E}_{min}}^{\mathcal{E}_{maks}} \rho(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = 1$$

se  $\rho(\mathcal{E})$  ne dipendas de  $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}_{maks} = \gamma(\mathcal{E}_{*\alpha} + V \cdot p_{*\alpha}) \quad \mathcal{E}_{min} = \gamma(\mathcal{E}_{*\alpha} - V \cdot p_{*\alpha}) = \frac{1}{\gamma 2vp_*} \quad (4.7)$$

### Kolizio Elastika

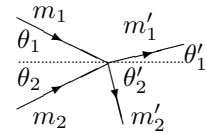
$c = 1$

Konservo de la kvar impulso. Estas nevariantaj relativecaj  $I$ ) La skalaraj produktoj  $p_1^2 = p_1'^2$   $p_2^2 = p_2'^2 = m_1^2, p_2^2 = p_2'^2 = m_2^2$   $p_1 p_2 = p_1' p_2'$   $p_1 p_1' \dots$  Sek variablo kaj kvar konservoj kial du nedipenda variabloj  $p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$ . **[Mandelstam-aj Variabloj]**

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 = p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1' p_2' = m_1^2 + m_2^2 + 2p_1' p_2'$$

$$t = (p_1 - p_1')^2 = (p_2 - p_2')^2 \text{ Transfero de la kvar impulso } p_1' p_1 = p_2' p_2$$

$$n = (p_2 - p_1')^2 = (p_1 - p_2')^2 \quad p_2 p_1' = p_1 p_2'$$



Oni postulas (2) senmova en la rilato de la masa centro  $|\mathbf{p}_{*1}| = |\mathbf{p}_{*2}|$   $\mathcal{E}_{1*} + \mathcal{E}_{1*}' = \mathcal{E}_{1*}' + \mathcal{E}_{1*}'$  ko varianta en  $p_* \Rightarrow p_* = p_*'$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\sqrt{p_*^2 + m_1^2} \sqrt{p_*^2 + m_2^2} = p_*^2$$

$$(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2 = (\sqrt{p_*^2 + m_2^2} + \sqrt{p_*^2 + m_1^2})^2 \geq (m_1 + m_2)^2$$

$$t = (p_1 - p_1')^2 = (\mathcal{E}_{1*} - \mathcal{E}_{1*}')^2 - (\mathbf{p}_{1*} - \mathbf{p}_{1*}')^2 = -2p_*^2(1 - \cos \chi) \leq 0$$

. Kalkulo de  $s$  kaj  $t$  en la laboratorio. La impulso de la partiklo (2) estas 0  $\mathbf{p}_2 = 0$   $\mathcal{E}_2 = m_2$ . Pro la energia konservado:  $\mathcal{E}_1 + m_2 = \mathcal{E}_1' + \mathcal{E}_2' \Rightarrow m_2 - \mathcal{E}_2' = \mathcal{E}_1' - \mathcal{E}_1$   
 $s = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\mathcal{E}_1 m_2$

$$t = (p_1 - p_1')^2 = (p_2 - p_2')^2 = 2m_2^2 - \mathcal{E}_2' m_2 \quad p_*^2(m_1^2 + m_2^2 - 2\mathcal{E}_1 m_2) = m_2^2(\mathcal{E}_1^2 m_1^2)$$

$p_*^{\text{at}} = (m_1^2(\mathcal{E}_1^2 - m_2^2)) / (m_1^2 + m_2^2 - 2\mathcal{E}_1 m_2)$ , konata  $p_{1*}$  oni eltiras  $\mathcal{E}_{*1} = \mathcal{E}_1 - p_*^2 / m_2(1 - \cos \chi)$ .

$$\mathcal{E}_{1min} = \frac{\mathcal{E}_1(m_1^2 + m_2^2) + 2m_1 m_2}{m_1^2 + m_2^2 + 2\mathcal{E}_1 m_2} \quad \frac{\mathcal{E}_{1min}' - m_1}{\mathcal{E}_1 - m_1} = \frac{\mathcal{E}_{1*}'}{\mathcal{E}_{1*}} = (\mathcal{E}_1 - m_1)(m_1 - m_2)^2.$$

En Relativeca kazo  $\mathcal{E}_1$  povas esti arbitre granda. En tiu ĉi esprimo ne aperas  $m_2$  kaj tial la transigata energio povas esti granda ankaŭ se  $m_1 \ll m_2$ . [...]

. Trovu la geometera limito korispondanta al ĉiuj valoroj de  $p'_1$   $p'_2$  en la laboratorio. De la impulsa konservo  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$  analoge al defalo  $p_\alpha$   $\alpha = 1, 2$ .  $p_{\alpha x}$   $p_{\alpha y}$ ,

$$1 = \frac{p'^*_{*y}}{p_*^2} + \frac{1 - v_*^2}{p_\alpha^2} \left( p'_{\alpha x} - \frac{v_* \mathcal{E}_*}{\sqrt{1 - v_*^2}} \right)$$

$$v_* = |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2| / (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) = |\mathbf{p}_1| (\mathcal{E}_1 + m_2) = v_* \quad p_*^2 = (m_2^2 (\mathcal{E}_1^2 - m_1^2)) / (m_1^2 + m_2^2 + 2\mathcal{E}_1 m_2)$$

...

### 4.3 Maxwell Lorentz-aj Ekvacioj en Kovarianta Formo al Vido

De la nerelativecaj Maxwell-aj ekvacioj oni scias ke  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$   $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  kaj simile al la aliaj kvarvektoroj oni volas krei  $A^\mu = {}^t(\phi, \mathbf{A})$  unika potencialo de kiu obteni ĉiujn kampojn kaj montri kiu estas kvarvektoro. Do oni difinas la **[Kvar potencialo]** de la elektrik magnetik kampo. Laŭ  $\nabla \times (\nabla \cdot) = 0$  la kvar potencialo estas difinita krom  $\nabla\Lambda$ , prefere,  $\mathbf{A}$  kaj  $\mathbf{A} + \nabla\Lambda$  aldonas la saman kampon  $\mathbf{B}$  |*Gauge Nevarianteco*|. La kampo estas do donita per la relacio

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$i = 1, 2, 3$   $\mu = 0, 1, 2, 3$

Oni obtenas do  $E^i = F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \partial^0 \mathbf{A} - \nabla\phi$  kaj  $F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = \epsilon^{ijkl} \partial_k A_l = \epsilon^{ijk} B_k$  do

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

La **[Elektromagnetika Tensoro]** estas do antisimetrika  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ .

#### 4.3.1 Maxwell-aj Ekvacioj

Oni povas obteni la Maxwell-aj ekvacioj per  $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \partial^\mu F^{\nu\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \partial^\mu (\partial^r h_o A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) = \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \partial^\mu \partial^r h_o A^\sigma - \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \partial^\mu \partial^\sigma A^\rho = \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \partial^\mu \partial^r h_o A^\sigma + \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\mu \partial^\rho A^\sigma = 2\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\mu \partial^\rho A^\sigma = 0$  ĉar estas la produkto inter ia tensoro simetrika  $\partial^\mu \partial^\nu$  kaj ia antisimetrika  $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ . Devolvinte  $\epsilon^{0ijk} \partial_i F_{jk} = -2\partial_i B^i = -2\nabla\mathbf{B} = 0$  kaj  $\epsilon^{i\mu\nu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} = 2(\partial_0 \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E}) = 0$

#### 4.3.2 Mat: Distribuoj

Mat

La distribuoj estas partikla klaso de funkcioj, konstruita por ekzemplo sur  $C(\mathbb{R})$ , de distribuo> una sukcesio de funkcioj  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$  (distribuo)

$$f_n(x) = \frac{n}{2} \Theta \left[ -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right] (x) \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}) \Rightarrow \|f_n\|_q = \left( \frac{n}{2} \right)^{q-\frac{1}{q}} \quad \|f_n\|_\infty = \frac{n}{2}$$

La  $f_n$  estas funkcionalaj ne limitaj kaj linearaj sur  $\mathcal{L}^p$  kun p koniugo de q. Lineara funkcionalo  $f$  de  $\mathcal{D}$  estas distribuo sse plitenas unu de tiuj ekvalentaj relacioj: I) La sukcesio numerika  $\{ \langle f_n, \pi \rangle \}$  iras al nulon per ĉiu sukcesio  $\{ \pi_n \}$  konvergente al la nulon de  $\mathcal{D}(U)$  II) Per ĉiu aro [kompatto]  $K$  en  $U$  eksista intero  $s \geq 0$  kaj plusa kostanto  $\alpha_k$  tiu ke

$$| \langle f, \pi \rangle | \leq \alpha_k \sum_{|j| \leq s} p_{k\underline{j}}(\pi) \quad \forall \pi \in \mathcal{D}_k(U)$$

<, > Skalara produkto

$$D^{\underline{j}} = \partial^{\underline{j}} = \partial_{x_1}^{j_1} \partial_{x_2}^{j_2} \dots$$

kun  $s$  ordo de la distribuo kaj  $p_{k\underline{j}}(\phi) = \sup_{x \in K} |D^{\underline{j}}\phi(x)|$ .



$f$  nomiĝas distribuo asociita al la funkcio  $\phi$  kiu estas nomata denseco de la distribuo  $f$ . Se  $\phi$  ekzistas la distribuo estas regulara, sigulara [altrimenti].

De tiu oni povas vidi ke la distribuoj devas havi iu funkcio  $\pi$  kiu estas funkcio de la |Spaco Proba|  $\mathcal{S}$  pro kalkuli ilin. La |Funkcio Proba| estas funkcio tre regulara kiu iras al nulon al la senfino pli de iu ajn potenco, prefere siajn derivaĵoj konverĝigas ĉiuj.

Pro ekzemplo oni povas kalkuli la derivaĵo de iu distribuo pasinte la derivaĵo sur la proba funkcio

$$\langle \partial_x f, \pi \rangle (x) \stackrel{\text{propartoj}}{=} f\pi \Big|_{-\infty}^{\infty} - \langle f, \partial_x \phi \rangle (x) = 0 - \langle f, \partial_x \phi \rangle (x)$$

La pli uzita distribuo estas la |Dirac-a  $\delta$ | kiu esta ekstas eksprimebla

- Fourier-a transformo  $\delta(t - t') = \int d\omega e^{i\omega(t-t')}$
- "Salto" de la polo  $\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$
- Simbolika funkcio

La Dirac-a  $\delta$  estas ankaŭ uzita kiel derivaĵo de la karakterika funkcio kaj pro esprimi la parto principala

√

### 4.3.3 Lorentz-aj Ekvacioj

### 4.3.4 Transformaĵo de la Kampo

## 4.4 Ekzercoj

(Reacio)

$$\gamma + T \rightarrow p + n + n$$

<Reacio

Oni sercas la energio de sojlo kial la proceso iĝas.  $T$  senmova en la laboratorio.  $p^\mu p_\mu$  estas ne varianta kaj la kvar impulso konserviĝas:  $(p_\gamma + p_T)^2 = (p_p + p_{n_1} + p_{n_2})^2 = m_p^2 + 2m_n^2 + 2p_p p_{n_2} + 2p_p p_{n_1} + 2p_{n_1} p_{n_2} \gg m_p^2 + 2m_n^2 + 2m_n^2 + 2m_p m_n + 2m_p m_n =$

$$p_p p_n = \mathcal{E}_p \mathcal{E}_n - \mathbf{p}_p \mathbf{p}_n \gg m_p m_n$$

$$(m_p + 2m_n)^2 \quad (p_p + p_T)^2 = (m_p + 2m_n)^2 + (\mathcal{E}_\gamma + \mathcal{E}_T)^2 - (p_\gamma + p_T)^2 \Big|_{lab} = \mathcal{E}_\gamma^2 + 2m_T \mathcal{E}_\gamma - \mathcal{E}_\gamma^2 + m_T^2$$

$$\mathcal{E}_T = \sqrt{\mathbf{p}_T^2 + m_T^2}$$

$$\mathbf{p}_\gamma^2 = |\mathbf{p}_\gamma|^2 = (\mathcal{E}_T + m_T)^2$$

$$\mathcal{E}_{sojlo} = \frac{(m_p + 2m_n)^2 - m_T^2}{2m_T} \quad (4.8)$$

(Defalo)

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

<Defalo

$m_\pi = 140 \text{ MeV}$     $m_\mu = 106 \text{ MeV}$     $m_e = 0,51 \text{ MeV}$ .  $e, \nu_e, \mu, \nu_\mu$ . La  $\pi$  estas formata de  $e$  kaj  $\mu$  du *quark*.

1) La maksimuma angulo inter  $\pi$   $\mu$ :

$$d = \gamma \mathcal{E}'_\mu v \quad v = v_\pi \quad \theta_{maks} \exists \text{ se}$$

$$s_x = \gamma p'_\mu$$

$$v > \frac{p'_\mu}{\mathcal{E}'_\mu} = v_\mu \quad (4.9)$$

$$v_\pi = p_\pi / \mathcal{E}_\pi = p_i \pi / \sqrt{m_\pi^2 + p_\pi^2} = 1 / \sqrt{1 + (m_\pi / p_\pi)^2} \simeq 1 / \sqrt{1 + 1/16} \simeq 1 - \frac{1}{2} \cdot 1/16 \simeq 1 - 0.03 = 0.97.$$

$$p'^2 = c^2 / 4m^2 ((M^2 + m_1^2 + m_2^2) - 4M^2 m_1^2) \quad (4.10)$$

$$, M \rightarrow m_1 + m_2 \quad M - m_\pi \quad m_1 = m_\gamma = 0 \quad m_2 = m_\mu \quad p'^2 = (m_\pi^2 - m_\mu^2) / 4m_\pi^2$$

$$p'_\mu = (m_\pi^2 - m_\mu^2) / (2m_\pi) \quad v'_\mu = p' / \sqrt{p'^2 + m_\mu^2} = (m_\pi^2 - m_\mu^2) / 2m_\pi \cdot ((m_\pi^2 - m_\mu^2)^2 + 4m_\mu^2 m_\pi^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2m_\pi = (m_\pi^2 - m_\mu^2) / (m_\pi + m_\mu) = 0.27$$

Ekzistas la maksimuma angulo  $v'_\mu < v$     $\sin \theta_{maks} = p'_\mu \sqrt{1 - v^2} / (v m_\mu) = (m_\pi^2 - m_\mu^2) / \gamma (2m_\pi v m_\mu)$ .

$$\theta_{maks} = \arcsin \left( \frac{p'_\mu}{\gamma \beta m_\mu} \right) = \arcsin \left( \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi p_\pi} \right). \quad (4.11)$$

II) La energia intervalo en kiu oni trovas  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\mu &= (\mathcal{E}'_\mu + \beta p'_\mu \cos \theta') \gamma & \mathcal{E}_{maks} &= \gamma (\sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2} \pm v_\pi \cdot p') & v &= p_\mu / \sqrt{m_\pi^2 + p_\pi^2} \\ p'_\mu &= (m_\pi^2 - m_\mu^2) / 2m_\pi & \mathcal{E}_{maks,min} &= 1/2 m_\pi^2 ((m_\pi^2 + m_\mu^2) \sqrt{p_\pi^2 + m_\pi^2} \pm p_\pi (m_\pi^2 - m_\mu^2)) \\ & & (1 - v^2) &= m_\pi^2 / (m_\pi^2 + p_\pi^2) & \gamma &= \sqrt{m_\pi^2 + p_\pi^2} / m_\pi & p_\mu^2 + m_\mu^2 &= (m_\pi^4 + m_\mu^4 - 2m_\pi^2 m_\mu^2) / (m_\pi^2 + m_\mu^2) = (m_\pi^2 + m_\mu^2) / 4m_\pi^2. \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_{maks,min} = \frac{\sqrt{m_\pi^2 + p_\pi^2}}{m_\pi} \left( \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} \pm \frac{p_\pi}{\sqrt{m_\pi^2 + p_\pi^2}} \cdot \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} \right) \quad (4.12)$$

$$290 MeV \leq \mathcal{E}_\mu \leq 500 MeV$$

III) la Probableco ke  $|\mathbf{p}_\pi|$  estas komprena inter  $400 - 450 MeV/c$ :

La probableco estas kostanta energie

$$p = \frac{\mathcal{E}_\mu(p_\mu = 450 MeV) - \mathcal{E}_\mu(p_\mu = 400 MeV)}{\mathcal{E}_{maks} - \mathcal{E}_{min}}. \quad (4.13)$$

Reacio  $\triangleright$

(Reacio) I)  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$  II)  $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$  III)  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$

I) Determinu la energio minimuma ke havu  $\pi^0$  en la reacio I) en  $K$  por ke la defalo produkto lokagas la duan reacion.

$p_p = 0$

$(\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p)^2 - (\mathbf{p}_\gamma + \mathbf{p}_p)^2 = \mathcal{E}_\gamma^2 + m_\gamma^2 + 2\mathcal{E}_\gamma m_\gamma - \mathcal{E}_\gamma$   $m_\gamma = 0 \Rightarrow |\mathbf{p}_\gamma| = \mathcal{E}_\gamma$   
 $\mathcal{E}_{\gamma sojlo} = (m(m_p + m_\pi)^2 - m_p^2) / 2m_p$ . En la masa centro  $|\mathbf{p}_{*1\gamma}| = |\mathbf{p}_{*2\gamma}|$ , Per la energia konservo  $\mathcal{E}'_\pi = \mathcal{E}'_{1\gamma} + \mathcal{E}'_{2\gamma} \Rightarrow \mathcal{E}'_\gamma$   $m_\pi + 2\mathcal{E}_\gamma$   $\mathcal{E} - \gamma$  en la laboratorio  $K$   $\mathcal{E}_{sojlo} = \mathcal{E}_\gamma = \gamma(\mathcal{E}_{*\gamma} + v p_*) = \dagger$  vrapideco en la masa centro  $\dagger = \frac{1}{2} m_\pi \gamma (1 + v)$ .  $\gamma$  eligita antaŭen. Oni konas  $\mathcal{E}_\gamma$  sojlo  $\mathcal{E}_{\gamma s} = \mathcal{E}_{\gamma maks}(v) \Rightarrow$  vrapideco de  $\pi^0$  en  $K$   $(1 - v_0) \mathcal{E}_{\gamma s}^2 = m_\pi^2 / 4 \cdot (1 + v)^2$ ,

$$v = \frac{(2\mathcal{E}_{\gamma s} / m_\pi)^2 - 1}{(2\mathcal{E}_{\gamma s} / m_\pi + 1)}$$

$$\mathcal{E}_\pi = \frac{m_\pi c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

II) Trovu la minimuman angulon formita de  $\gamma$  en la defalo de  $\pi^0$  de la dua produkto en sojlo.

Oni kontrolas se estas la minimuma angulo, prefere  $v' < v_{*\gamma} = c$ , sekve ekzistas  $\tan(\theta_{min}/2) = v_{*\gamma} / v' \cdot \sqrt{1 - v'^2} = 1/v' \cdot \sqrt{1 - v'^2}$ . Ĉar la reakcio okazas en sojlo  $v'$  estas  $v_*$ .

$$v' = \frac{|\mathbf{p}_\gamma + \mathbf{p}_p|}{\mathcal{E}_\gamma + \mathcal{E}_p} = \frac{|\mathbf{p}_\gamma|}{\mathcal{E}_\gamma + \mathcal{E}_p} = \frac{\mathcal{E}_\gamma}{\mathcal{E}_\gamma + m_p}.$$

Kiam  $E_\gamma = \mathcal{E}_{\gamma s}$ .

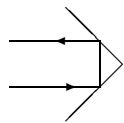
Angula transformo  $\triangleright$

(Angula transformo)

En ia sistemo de rilato inercia moviĝas kun rapideco  $v$  longe la akso  $x$  la angula spegulo kiu facoj havas valoroj egalaj rilate la akso  $x$ . Lume fonto, senmova rilate  $K$ , eligas fotonoj en  $x$  direkcion.

I) Oni determini l'angulo  $\phi$  ke la facoj devas havi kial la fotonoj, eligitaj sur ambaŭ la facoj, movas longe  $x$  (en la oposita verso laŭe tiu de incido):

La tanĝo de  $\phi$  reprezentas  $y/x$ -n. La tan  $\phi_0$  reprezentas  $K_0$ -n, sistemon solidan al spegulo.  $y = y_0$   $x_x = x/\gamma$ ,  $\tan \phi = y_0 \gamma / x_0 = \gamma$



II) Determinu la angulo  $\theta$  formita da la radio refleksa la unua fojo kun la faco de la spegulo en kiu okazis la refleksio.

$$\theta = \psi - \phi \quad \tan \psi = v_y/v_x \quad \mathbf{v} \text{ rapideco de la fotono poste la refleksio en } K.$$

$$\mathbf{v}_0 = (0, 1, 0) \quad \mathbf{v}_0 \text{ en } K_0,$$

$$v_x = \frac{v_{0x} + v}{1 + v_{0x}v} \quad v_y = \frac{v_{0y}\sqrt{1 - v^2}}{1 + v_{0x}v} \quad (4.14)$$

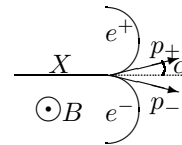
$$v_{0x} = 0 \quad v_x = V \quad v_y = \sqrt{1 - v^2} \quad \theta = \psi - \phi = \arctan(\sqrt{1 - v^2}/v) - \arctan(1/\sqrt{1 - v^2}).$$

(Kampo Elektro Magnetiko)

$$X \rightarrow e^+ + e^-$$

<Kampo Elektro Magnetiko

La reacio okazas en plano perpendikla al la direkco de ia kampo magnetiko kostanta kaj uniforma de modulo  $B$ .  $X$  neŭtra. Oni mizuras la radioj  $r_+$  kaj  $r_-$  de la cirkonferencoj kaj la komenca angulo  $\alpha$  kaj la distanco  $L$  inter la punkto de produkco kaj neniigo de  $X$ .



I) Trovu la maso de la partiklo  $X$ :

$$\text{Konservo de la kvar impulso } m_X^2 = (p_+ + p_-)^2 = (\mathcal{E}_+ + \mathcal{E}_-)^2 - (\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_-)^2 = \mathcal{E}_+^2 + \mathcal{E}_-^2 + 2\mathcal{E}_+\mathcal{E}_- - p_+^2 - p_-^2 - 2\mathbf{p}_+\mathbf{p}_- = m_e^2 + |\mathbf{p}_+|^2 + m_e^2 + |\mathbf{p}_-|^2 + 2\sqrt{(m_e^2 + p_+^2)(m_e^2 + p_-^2)} - |\mathbf{p}_+|^2 - |\mathbf{p}_-|^2 - 2|\mathbf{p}_+| \cdot |\mathbf{p}_-| \cos \alpha.$$

II) Tempo de vivo de  $X$ :

En kampo  $B \perp$  al la trajektoro  $|\mathbf{p}_\pm| = eBr_\pm \quad \tau_X = t\sqrt{1 - v^2} = l/v\sqrt{1 - v^2}$  kie  $v$  estas la rapideco de  $X$  en la laboratorio,  $t$  la tempo de vivo en la laboratorio.  $\tau = \sqrt{1 - v^2}/(m_X v) \cdot (m_X v) = L|\mathbf{p}_X| \cdot m_X,$

$$\mathbf{p}_X = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad (4.15)$$

$$|\mathbf{p}_X|^2 = \mathbf{p}_+^2 + \mathbf{p}_-^2 + 2\mathbf{p}_+\mathbf{p}_- = (eB)^2 r_+^2 + R_-^2 + 2r_+r_- \cos \alpha \text{ do}$$

$$\tau_x = \frac{Lm_X}{eB\sqrt{r_+^2 + r_-^2 + 2r_+r_-}}$$

## Capitolo 5

# Kvantuma Fenomenologio

### 5.1 Luma Elmito

Por ia ŝnuro la harmonikaj ondoj estas  $\lambda = 2L/n_x$ , ĉiu nomiĝas  $n_x$ -modo. La kvanteco de tiuj modoj estas priskriebla per  $2L/(\lambda + \Delta\lambda) = n_x - \Delta n_x$ . Se  $L \gg \Delta\lambda$   $\Delta n_x = -2L\Delta\lambda/\lambda^2$ . Tiu valoras ankaŭ por la plano  $\hat{e}_y$  se la ŝnuro diriĝas en la  $\hat{e}_z$  direkcio  $\Delta n_l = 2\Delta\lambda/\lambda^2|_{\hat{e}_x} + 2\Delta\lambda/\lambda^2|_{\hat{e}_y} = 4\Delta\lambda/\lambda^2$  ĉar havas du liberaj gradoj. La modoj de vibradoj en kvadrato de lato  $L$  estas por elektromagnetik ondo estas

$$E_z = f(z, L) \sin \frac{n_x \pi}{L} q_x \sin \frac{n_y \pi}{L} q_y$$

prefere, la kvanto por kiu ondo povas reveni al la inicialan punkton en finitaj refleksadoj. La unua harmonika modo estas  $2L/\lambda$  do la oni enponas la kondicon ke  $n_x^2 + n_y^2 = 4L^2/\lambda^2$  aŭ en tri dimensio  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 4L^2/\lambda_{unua}^2$ . La sekvantaj harmonikaj estas ene. Laŭ supre oni povas vidi ke la numeroj ene al la sfero de radio  $2L/\lambda$  de sole unu oktanta estas

$$n = \frac{4}{3} \frac{1}{8} \frac{2L}{\lambda_{unua}} \frac{4L}{\lambda_{unua}^2} = \frac{4\pi}{3} \frac{L^3}{\lambda_{unua}^3}$$

do la diferencialo de tiu numero estas  $dn = 4\pi d\lambda/\lambda^4$

Oni volas konsideri la elmito de korpo varma. Oni konstruas kavon aŭ fonon de omogena materialo de kiu oni elprenas traskura parto per malgranda truo nomiĝita **|Korpo Nigra|**. Oni povas konsideri ke tiu elmito ne devas depeni por la ĥemia strukturo de tia korpo ĉar la temperaturo plene difinas la ond longeco de la elctr magnetika ondo elmetita. La propago de tiu ondo devas esti isotropa ĉar oni ne povas konstrui maŝino kiu laboras sur diversaj temperaturaj absorbiloj violinte la dua termodinamik pricipo, prefere, agente laboron sine kaloro. Diversaj fizikistoj devokris empirik leĝojn kiu finfine estos plene priskribita in kohera formo per la Plank-a leĝo. [1879 Stefan:  $I = \sigma \mathcal{T}^4$   $\sigma = (\pi^2/60)k^4/\hbar^3 c^2 = 5.670 \cdot 10^{-8} [W/(m^2 K^4)]$ ]. Wien: [1893] la unukolora elmita povo por nigra korpo estas  $I_\lambda := \lambda^{-5} f(\lambda \mathcal{T}) = \mathcal{T}^5 f'(\lambda \mathcal{T})$  do  $f(\lambda \mathcal{T}) = \lambda^5 \mathcal{T}^5 f'(\lambda \mathcal{T})$ .

Planck konsideris la atomoj de la korpo nigra kiel aromonikaj osciladoj de propra karaktera frekvenco distribuitaj laŭe la Maxwell-Boltzmann distribuo ja la fiksa temperaturo.  $\mathcal{E} = p^2/2m + k/2 \cdot x^2$   $\Delta N = \sum_{n=0}^{\infty} \tau \omega \hbar$

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

### 5.2 Fotoelektrika Efekto

Inicie estas malkovritaj diversaj efektoj de interacioj inter la lumo kaj kuranto. Hertz [1887] dekovris ke la ultraviolekta lumo ĝenerita per [scintille] de oscilanta circuito faciligis la pasado de kuranton inter la platoj de [iato scintillatore]. Hallwacs dokovris ke ia plato negativ polarigita perdis sian ŝarĝon se lumigita. Stoletow, uzinte du

kondukt platoj fronte ponitaj, vidis ke la kuranto pasis pli facile se plato estis luminita en la kuranto verso. Elster kaj Geiteldekovris ke tiu efeko dependis por la ĥemia strukturo de la materialoj, fakte la pli elektropositivaj estas la pli fotoelektrikaj kiel la alkalaj.

### 5.3 Compton Efekto

Compton [1923] montris ke ankaŭ la fotono havas angulan momanton kiu povas transferi al la elektrono laŭ la rilacio

$$\frac{\hbar\omega}{c} = \frac{\hbar\omega_\theta}{c} \cos \theta + p \cos \phi \Big|_{\hat{e}_x} \quad 0 = \frac{\hbar\omega_\theta}{c} \sin \theta + p \sin \phi \Big|_{\hat{e}_y}$$

por elektrono elmetita de  $p$  momanto elmetita al la angulo  $\phi$  en la iniciala nemova elektrona rilato. Do

$$\frac{h}{\lambda} - \frac{h \cos \theta}{\lambda_\theta} = \frac{m_0 v \cos \phi}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \frac{h}{\lambda_\theta} \sin \theta = -\frac{m_0 v \sin \phi}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

suminte kaj kvarinte

$$\frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda_\theta^2} - \frac{2h^2}{\lambda\lambda_\theta} \cos \theta = m_0^2 c^2 (\gamma - 1)^2$$

$$\mathcal{E} \hbar\omega = \hbar\omega_\theta + m_0(\gamma - 1)c^2$$

$$h/\lambda - h/\lambda_\theta + m_0 c = \gamma m_0 c$$

$$m_0 c \gamma = 2 \frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda_\theta^2} - \frac{2h^2}{\lambda\lambda_\theta} + 2m_0 c h \cdot$$

$$\left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_\theta} \right) + m_0^2 c^2$$

noi konfrontas la du ekvacioj kaj de  $2h^2/\lambda\lambda_\theta \cdot (1 - \cos \theta) - 2m_0 c h(1/\lambda - 1/\lambda_\theta) = 0$  oni obtenas finfine.

$$\Delta\lambda = \lambda_\theta - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) \stackrel{n}{=} 0.02426(1 - \cos \theta) [\text{\AA}] \quad (5.1)$$

## Capitolo 6

# Kvantuma Mekaniko

### 6.1 Malsamaĵoj

En la kvantuma mekaniko oni havas gravajn malsamaĵojn rilate la klasikan mekanikon.

La procedo plene ŝanĝas ĉar, por la nedermineco, oni ne asociigas valoron al la dinamika variabla sed la dinamika variabla havas spektron de valoroj ke la mezuro aliras laŭ sia distribuo. Sole la mezuro povas doni valorojn al la variabla dinamika kaj modifas la staton de la sistemo. La variabla dinamika ne havas valorojn ĝis ne estas mezurita kaj ĉia antaŭvido estas de probabla tipo. Al ĉiuj valoroj de la spektro kongruas memstato de la ond funkcio.

La sola funkcio estas la ond funkcio kies kvadrata modulo priskribas la probabla denso de la partiklo. Ĉia variabla estas akirita per la akcio de operatoro sur la ond funkcio. La **|Operatoro|** agas sur vektorajn spacojn tiu ke la ond funkcio devas esti dekompona en otogonala bazo sur senfina vektora spaco. Sercante le solvon de diferenciala ekvacio oni do sercos funkcion  $\in \mathcal{L}^2$  kiu estas isomorfa al Hilbert-a spaco. La ond funkcio havu la ecoj de ia ondo, tiel priskribita en la ĉapitro pri la ondoj; estu funkcio sole de parametro  $(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x} - \beta t + \phi)$ .

Ia ond funkcio estas priskribebla en la formo

$$\Psi = Ae^{i\frac{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x} - \beta t}{\hbar}} \quad (6.1)$$

Oni povas deduki la parametroj  $\partial_x \Psi = ip_x \Psi$   $\partial_x^2 \Psi = -i/\hbar^2 \cdot p_x^2 \Psi$   $\partial_t \Psi = -i/\hbar \cdot \mathcal{E} \Psi$  kaj akiri la **|Schroedinger-a Ekvacio|**

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \Psi + \mathcal{V} \Psi = -\frac{\hbar}{i} d_t \Psi \quad (6.2)$$

Si la potencialo estas temp nedipenda kaj la energio kostanta oni povas faktorigi la ond funkcio  $\Psi(x, t) = \psi(x)f(t)$ . La akcio de la operatora donas al la variabla  $o$  valorojn kiu formas aron nomatan **|Spektro|**-n. La Spektro povas esti diskreta kaj kontinua, la valoroj de  $o$  en la vektora prezento estas la *memvaloroj* kaj la funkcio ke solvas la Schrödinger-an ekvacion estas *memvektoroj* por diskret spektro aŭ *memfunkcioj* kontinue. La memvektoroj estas bone priskribita per la lineara alĝebro kun ĝiaj iloj tiel traco, determinanto ... La memfunkcioj estas anstataŭe nature definita per la funkcionala priskribo kiu operas de spacoj vektoraj sur kampojn. La numero  $n$  kiu determinas univoce iu valoro  $o_n$  de ĝia spektro estas la **|Memstato|** kaj  $\mathcal{H}$ , pro sia diseco, estas dekomponata en siajn **|Memspaco|**-jn  $\mathcal{H} = \bigoplus_{a \in Sp(\mathcal{A})} \mathcal{H}_a$ .

### 6.2 Ekvacio laŭ la memvaloroj

En kvantuma mekaniko ĉia dinamika parametro estas kalkulita per la *ekvacio laŭ la aŭ tovaloroj*

$$\hat{O}|\psi \rangle = o|\psi \rangle$$

kie eksprimas la valoroj de iu variabla kiel memvaloroj de la ago de la operatoro sur vektoron, prefere, la ond funkcio esprimita en ia bazo.

### 6.2.1 Mat: Vektoro

Mat

Iu vektoro  $v$  estas prezentigebla per ia bazo  $\{e_1, e_2, \dots\}$  de ortonormalaj versoroj multplikataj kun  $\{c_1, c_2, \dots\}$  koeficientoj. Oni definis  $|v\rangle$ , vektoro de la Hilbert-a spaco nomigita **ket**, sur bazon  $a_i$  kaj  $\langle v|$  (**bra** |  $\langle \cdot |$ ) estas la sia transpozio.  $|v\rangle^\dagger = \langle v|$ .

$$(\hat{o}|v\rangle)^\dagger = \langle v|\hat{o}^\dagger$$

✓

### 6.2.2 Mat: Operatoroj

Mat

La operatoroj estas linraj funkcioj de vektoraj en vektoraj spacoj. La **Vektora Spaco** estas priskribita per

- $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in S \quad |\phi\rangle + |\psi\rangle \in S$  asocia kaj komuta
- havu nula vektoro  $|\phi\rangle + |0\rangle = |\phi\rangle$
- inverso  $\forall |\phi\rangle \exists -|\phi\rangle : |\phi\rangle + (-|\phi\rangle) = |0\rangle$
- lineara  $c|\phi\rangle = |c\phi\rangle$

<Vektoraj Spacoj

(Vektoraj Spacoj)  $\mathbb{C} \quad \mathbb{R} \quad \mathbb{P}(\mathbb{C})$  polinomo,  $\mathbb{C}^n \quad \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ .

La operatoro estas prezentita kiel matricio kiu operas sur la vektorojn  $(\hat{A}|\psi\rangle)_j = \sum_i a_{ij}\psi_i$ . Tiu povas esti:

- isomterika  $\|U|\psi\rangle\| = \||\psi\rangle\| = \langle U\psi|U\psi\rangle = \langle \psi|U^\dagger U|\psi\rangle$
- Limita  $\exists c \in \mathbb{R} \||A|\psi\rangle\| = c\||\psi\rangle\|$
- Memaldonita  $\langle A\phi|\psi\rangle = \langle \phi|A\psi\rangle$
- Hermite-a  $\langle A\phi|\psi\rangle = \langle \phi|A\psi\rangle \quad \wedge \quad D(A) = D(A^\dagger)$

Oni povas pluen dekomponi operatoron en sumo de ĝiaj memvaloroj sur ĝiaj memspacoj kun nihilpotenta matricio resto. Oni povas vidi ke la dekompono en memvaloroj estas simetrie *nevarianta* do la determinanto kaj la traco de la matricio en iu ajn prezento estas la produkto kaj la sumo de la memvaloroj

✓

$\hat{O}$  estas operatoro kiu agas sur la ond funkcio kaj  $o$  estas la valoroj de la spektro de la variabla dinamika presentigas per la operatoro. (Posicio)  $\langle Q\psi | \psi \rangle (x) = x\psi(x)$  ne limita en  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , Hermite-a. (Pareco) La operatoro de pareco ŝanĝas la signo al la variabla,  $\hat{P}f(x) = f(-x)$ , estas operatoro unueca, limita, Hermite-a kun memvaloroj  $\pm 1$  kaj estas prezentigebla per  $e^{-\partial_x}$ .

<Posicio

<Pareco

<Traslacio

Estas operatoro kiu transagas la variabla de iu kvanteco, limita, unueca, sed ne Hermite-a, eksprimebla per  $e^{l\partial_x}$  kun aŭvaloroj  $e^{2\pi n l/a}$  en la rondo de radio  $a$ .

Si la komuto de du operatoroj estas  $c$ -numero (kostanto) oni povas vidi ke

$$[\hat{A}, \hat{B}] := c$$

$$[\hat{A}, \hat{B}^n] = B[\hat{A}, \hat{B}^{n-1}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-1} = cn\hat{B}^{n-1} + c\hat{B}^{n-1} = \hat{B}^{n-1}c(1+n)$$

ĝeneraligante  $\dagger \quad f'(\hat{A}) = \sum_n c_n n \hat{A}^{n-1} \quad \dagger$

$$m = n - 1$$

$$[f(\hat{A}), \hat{B}] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n [\hat{A}^n, \hat{B}] = c \sum_{n=0}^{\infty} c_n \hat{A}^{n-1} (1+n) = c \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+1} m \hat{A}^m = c f'(\hat{A})$$

Oni definis do la operatoro de translacio kiel

$$[\hat{B}, e^{-\xi \hat{A}}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{n!} [\hat{B}, \hat{A}^n] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^{m+1}}{(m+1)!} (-1) m c \hat{A}^m = \xi c e^{-\xi \hat{A}}$$

$$[\hat{B}, e^{-\xi \hat{A}}] = B e^{-\xi \hat{A}} - e^{-\xi \hat{A}} \hat{B} \quad e^{\xi \hat{A}} [\hat{B}, e^{-\xi \hat{A}}] = e^{\xi \hat{A}} \hat{B} e^{-\xi \hat{A}} - \hat{B} \quad e^{\xi \hat{A}} c \xi e^{-\xi \hat{A}} = e^{\xi \hat{A}} \hat{B} e^{-\xi \hat{A}} - \hat{B}$$

$$e^{\xi \hat{A}} \hat{B} e^{\xi \hat{A}} = \hat{B} + c \xi \tag{6.3}$$

△

Finfine  $\psi$  estas la ondo funkcio de kiu oni povas deduki ĉia dinamika variabla. La pli grava ekvacio enketinda estas la ekvacio de Schoedinger

$$H|\psi\rangle = \mathcal{E}|\psi\rangle$$

kie H estas operatoro diferenciala prezentas Hamilton-an ekvacion ke klasike estas

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + V(x).$$

Pro De Broglie-a relacio  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$  oni povas prezenti  $\vec{p}$  per la variabla  $\vec{x}$  ĉar  $\vec{k}$  reciprokas  $\vec{x}$ -n kaj sekve estas prezentigebla per la Fourier-a transformo

$$\Psi(\vec{x}) = \frac{1}{\hbar} \int \psi(\vec{p}) e^{(\mathcal{E}t - \vec{p}\vec{x})/i\hbar} d^3p.$$

Pro tio oni dedukas la ekvacio de Schroedinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi_t(\vec{x}) = \int \frac{p^2}{2m} \psi(\vec{p}) e^{(\mathcal{E}t - \vec{p}\vec{x})/i\hbar} d^3p$$

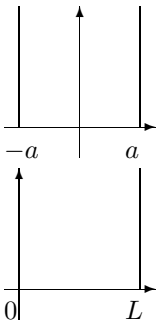
Dume

$$\Psi_t(\vec{x}) = \nabla_{\vec{x}} \int -\frac{p}{i\hbar} \psi(\vec{p}) e^{(\mathcal{E}t - \vec{p}\vec{x})/i\hbar} d^3p = \nabla_{\vec{x}} \int \frac{p^2}{\hbar} \psi(\vec{p}) e^{(\mathcal{E}t - \vec{p}\vec{x})/i\hbar} d^3p$$

Kiu estas la ekvacio Scroedinger-a se

$$i\hbar d_t \Psi_t(\vec{x}) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \right) \Psi_t(\vec{x}).$$

### 6.3 Potenciala Kavoj



La potenciala kavoj estas definita per iu potencialo nulas inter  $[-a, a]$  kaj senfina alie. La ekvacio de kontinueco trudas ke la ĝenera solucio  $\psi(x) = A \sin(\vec{k}\vec{x}) + B \cos(\vec{k}\vec{x})$  egalas en la punktoj  $-a^-$  kaj  $-a^+$ , kaj simile en  $a$ , kie la solucio estas nula pro la presenco de senfina potencialo. La solucio devas havi  $k = n\pi/a$  kaj sinusoj termoj por  $n$  para kaj kosinusoj por  $n$  nepara. Oni povas translaci la ekvacio de  $[-a, a]$  al  $[0, L]$  tie  $L = 2a$ . La termoj estas tiel sole sinusaj kaj la nedimensiigita termo, kiu usiĝas por havi la koeficientoj de la Fourier-a evolvo sine dimensio, ŝanĝas de  $\sqrt{2/a}$  al  $\sqrt{1/L}$ . Do nia solucioj estas

$$\psi_n(x) = c_n \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi n x}{L}.$$

### Mez Valoro

Oni do facile kalkulas la mez valoro de iu operatoro  $\hat{b}$  kiel  $\langle \hat{b} \rangle := \langle \psi | \hat{b} | \psi \rangle$ . Specife, la energia mez valoro estas  $\langle \hat{H} \rangle = \pi^2 \hbar^2 / 2mL \sum_n n^2 c_n^2$ . La probablo per iu memstato estas  $\mathcal{P}_n = |c_n|^2$ .

Se oni mizuras la energio de la partiklo ne ekzistas plu alia memstato ekster tiu mizurata. Oni devas kalkuli la probablo de nove ĉar tiu valoro havas ĉiu probablo.



Diverse oni povas konsideri la probablo de iu memstato kiel sia  $|c_n|^2$  por eco de la ortonormala dekompono. Si oni mizuras la pozicio de la partiklo oni devas rekalkuli la funkcio en sia intervalo de ĉeesto per  $\langle \psi_n | \psi(t) \rangle$  tie  $\psi(t)$  estas la tempa evoluo  $\psi(t) = \sum_n e^{\mathcal{E}_n t / \hbar} \psi_n^{t_0}$ . Oni povas vidi ke ĉia solucio estas nevarianta por relativa faza termoj ĉar iu kontribuo de formo  $e^{-i\omega t}$  en la skala produkto  $(\psi^*, \psi)$  malaperas. Oni povas forigas unu faza termo. Ekzemple, si la ond funkcio havas sole  $i$ -vica kaj  $j$ -vica termoj la solucio estas  $\psi(t) = \psi_i + \psi_j e^{\omega t / \hbar}$  tie  $\omega = \mathcal{E}_j - \mathcal{E}_i$ .

Pareco en tia kavoj la solucio havas tia pareco:  $\psi_n(-x) = (-1)^n \psi_n(x)$ . Ĉiam la potencialo estas simetrika oni havas periodikajn funkciojn ĉar  $V(-x) = V(x)$ ,  $\psi(-x)$  kaj  $\psi(x)$  estas solucioj de la sama ekvacio:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \psi(\pm x) = \mathcal{E}_n \psi(\pm x)$$

kaj ĉia funkcio estas reprezentita per  $\psi(x) = 1/2(\psi(x) + \psi(-x)) + 1/2(\psi(x) - \psi(-x))$ .

**|Probabla Denseca Kuranto|**

$$j = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* d_x \psi - \psi d_x \psi^*) = 2\Re \left( -\frac{i\hbar}{2m} \psi^* d_x \psi \right) \quad (6.4)$$

Se  $\psi = \psi_1 + i\psi_2$  oni povas skribi  $j$  kiel  $j = \hbar/m(u_1' u_2 + u_1 u_2')$

Se  $z_1$  kaj  $z_2$  estas solvoj de siaj diferencialaj ekvaciojn,  $\dot{z}_1 + F_1(t) + z_1 = 0$   $\dot{z}_2 + F_2(t) + z_2 = 0$  oni montras la **|Wronsky-a Teoremo|**

$$\left( z_1 \dot{z}_2 - z_2 \dot{z}_1 \right) \Big|_a^b = \int_a^b (F_1(t) - F_2(t)) z_1 z_2 dt \quad (6.5)$$

## Pareco

en tiu kavoj la solucio havas parecon (aŭ la vektoroj estas aŭtovektoroj por la operatoro pareco):  $\psi_n(-x) = (-1)^n \psi_n(x)$ . Kiam la potencialo estas simetrika oni havas periodikajn funkciojn ĉar  $V(-x) = V(x)$ ,  $\psi(-x)$  kaj  $\psi(x)$  estas solucioj de la sama ekvacio:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \psi(\pm x) = \mathcal{E}_n \psi(\pm x)$$

kaj ĉia funkcio estas reprezentita per  $\psi(x) = 1/2(\psi(x) + \psi(-x)) + 1/2(\psi(x) - \psi(-x))$ . <Potenciala Kavoj

Oni havas partiklon en tia potenciala kavoj. En tiu kavoj la ond funkcio estas ne degenerinta kaj spektro diskrete. Pro la Wronsky-a teoremo du solvadoj de la sama ekvacio al la memvaloroj, spektre diskrete, estas lineare nedependaj ĉar la Wronsky-a kostantas kaj, specifike, nulas ĉar nuliĝas solvadoj per  $x \rightarrow \infty$ .  $\psi_2 d_x \psi_1 = \psi_1 d_x \psi_2$  do  $\psi_1 = c\psi_2$ . Si oni volas mizuri la partiklo pro dekvri en kia memstato estas oni aplikas projektoron. La mizuro ne estas unueca kaj ne plutenas normon.

**|Projektoroj|** Observablo kun spektro diskreta eksprimeblas kiel serio de projektoroj sur siaj memspacoj. Oni elektas  $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$   $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$   $Q_1 |\psi\rangle = |\psi_1\rangle$   $\langle \psi | \psi \rangle = 1$  kaj  $D(Q_1) = \mathcal{H}$ ,  $Q_2 |\psi\rangle = |\psi\rangle - |\psi_1\rangle$  Hermite-a ĉar siaj mezvaloroj estas idempotencaj kaj ortogonalaj.  $|\phi\rangle \langle \phi|$  estas projektoro longe la versoro  $|\phi\rangle$   $(|\phi\rangle \langle \phi|) |\psi\rangle = |\phi\rangle (\langle \phi | \psi \rangle)$  Hermite-a  $(|\phi\rangle \langle \phi|)^\dagger = (|\phi\rangle \langle \phi|)$ .

La mizuro determinas subaron de iu variabla aŭ operatoro.

**Energio** Si oni determinas kelkajn energiajn memvalorojn oni scias ke la sistemo ne ŝanĝos tiuj memvaloroj ĉar ŝanĝas la probablo de ĉiu stato. Ofte oni scias la energian mez valoron kiu estas

$$[\hat{A}, \hat{A}] = 0$$

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \langle \psi_n(t) | H | \psi_n(t) \rangle = \langle \psi_n | e^{-\frac{Ht}{\hbar}} e^{\frac{Ht}{\hbar}} H | \psi_n \rangle = \mathcal{E}_n |c_n|^2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \sum_n n^2 c_n^2$$

do per la kondico  $\sum_n c_n^2 = 1$  oni akiras la formon de la ond funkcio.

Posicio Mizuro povas determini subaron de la posicio. Ekzemple, oni dekovras ke la partiklo ĉeestas en la aro  $[-a, 0]$  tempe  $t_0 = 0$ . Do

$$c_n = \langle \psi_n | \psi_0 \rangle = \frac{2}{L} \int_{-a}^0 \psi_n^* \psi_0 = \frac{2}{L} \sum_i \int_0^{L/2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)$$

tie  $i$  estas la inicialaj memstatoj. La funkcioj ortogonalaj en la intervalo  $[-a, a]$  ne estas pli longe ortogonalaj en diversa aro. ŝanĝas la simetrio de la problemo sed ne ŝanĝas la simetrio de la funkcioj. Si oni volas determini la partiklo tempe  $t_1 \neq t_0$  oni devas kalkuli

$$c_n(t_1) = \langle \psi_n | \psi(t_1) \rangle = \langle \psi_n | e^{\frac{\hat{H}t_1}{\hbar}} | \psi_{t=0} \rangle = \langle \psi_n | e^{\frac{\epsilon_n t_1}{\hbar}} | \psi_{t=0} \rangle = e^{\frac{\epsilon_n t_1}{\hbar}} \langle \psi_n | \psi_{t=0} \rangle$$

ĉar  $|\psi_n\rangle$  estas memvaloro de la operatoro  $\hat{H}$ . Oni do kalkulas se  $\psi_{t=0} = \sum_i \psi_i$

$$c_n(t_1) = \int_{-a}^a \psi_n^* e^{\frac{\epsilon_n t_1}{\hbar}} \psi_i = \frac{2}{L} \sum_i \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\frac{\epsilon_n}{\hbar}(t_1-t_0)} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)$$

Se la iniciala ond funkcio ĉeestis sole en la unua memstato sia ond funkcio ŝanĝas poste la mizuro de  $\sqrt{2/L} \sin(\pi x/L) \rightarrow \sqrt{1/L} \sin(\pi x/L)$ , kaze dekovrita en tiu spaco, 0 alia. Se la ond funkcio havas iniciu du termoj oni povas skribi sia tempa evoluo tiel  $\psi(t) = \sqrt{2/L} \sin(i\pi x/L) + \sqrt{2/L} \sin(j\pi x/L) e^{(\epsilon_i - \epsilon_j)t/\hbar}$  ĉar ĉia funkcio estas nevarianta por relativaj fazaj termoj kiuj estas ĉiuj solukcioj de la sama diferenciala ekvacio.

Pareco Se ekzemple la ond funkcio iniciu ĉeestis en finitaj neparaj memstatoj, poste la mezuro, oni havas senfinaj neparaj memstatoj ke, poste ia mizuron, akiras memvaloron  $-1$  kun ĉia probablo.

△

### 6.3.1 Faktoriĝo

Se la Hamiltona estas separebla oni povas faktoriĝi la solvojn  $\psi(\underline{x}) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\dots$  aŭ leĝi la Schrödinger-an ekvacion kiel sistemo de nedependa diverencialan ekvacion. Se, ekzemple, oni havas ian elastik potencialon inter du partikloj oni priskribas la sistemon per la koordinato de la mas centro kaj tia rilata. La Hamilton-a estas do separebla

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_2} + \frac{1}{2}k|\hat{q}_1 - \hat{q}_2|^2 \rightarrow \tilde{H} = \frac{\hat{p}_{mc}^2}{2m_{tot}} + \frac{\hat{p}_r^2}{2\mu} + \frac{1}{2}k\hat{q}_r^2$$

La mez valoro de la energio en tri dimensia kazo estas la sumo de la valoroj de ĉio koordinato.

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left( \frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{n_2^2}{l_2^2} + \frac{n_3^2}{l_3^2} \right)$$

kiu havas deĝenera indico  $\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j 1 = \sum_j^n j + 1 = j^2/2 + j/2 + j + 1$

## 6.4 Armonika Oscilatoro

Oni konsideras la du operatoroj nedimensiigitaj  $\check{X} := m\omega/\hbar X$  kaj  $\check{P} := P/m\omega\hbar$  pro kio  $\check{H} = H/\hbar\omega = \frac{1}{2}(\check{P} + \check{X})$  tiu ke  $[\check{X}, \check{P}] = i\mathbb{I}$ . Oni nomas  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\check{X} + i\check{P})$  kaj  $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\check{X} - i\check{P})$  kiu donas  $\check{H} = aa^\dagger + \mathbb{I}/2 = N + \mathbb{I}/2$ . Pluen  $[a^\dagger a, a] = a^\dagger[a, a] + [a^\dagger, a]a = -\mathbb{I}a$   $[a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger[a, a^\dagger] + [a^\dagger, a^\dagger]a = \mathbb{I}a$ . Oni sercas la solukcion de tiu

ekvacio laŭ la memvaloroj  $N|n\rangle = n|n\rangle$  kun la kondico  $\langle n|n\rangle = 1$  oni vidas ke se  $0 \leq \| |a\rangle \| = \langle n|a^\dagger a|n\rangle = \langle n|n\rangle = n < n|n\rangle = n$   $n$  estas numero ne negativa.

$0 \| |a^\dagger\rangle \|^2 = \langle n|aa^\dagger|n\rangle = \langle a|a^\dagger a + \mathbb{I}|n\rangle = \langle n|n + \mathbb{I}|n\rangle = n + 1$ . Oni do nomas  $a^\dagger$  operatoro de kreaĵo kaj  $a$  operatoro de detruo. Gravas la kondicio  $Sp(N) = \mathbb{N}_0$   $Na^\dagger|0\rangle = 0$ .

Povas oni demontri ke

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{n!}|0\rangle \tag{6.6}$$

kaj oni povas per inducio.  $dim(\mathcal{H}_n) > 1$   $|n, 1\rangle$   $|n, 2\rangle$   $\langle n, 1|n, 2\rangle = 0$  nedependaj kaj ortogonalaj. Oni havas unu kaj unu sole ekvacion lineare nedipenda kaj la Hamilton-a spektro estas ne deĝenera  $\check{H}|0\rangle = (N + \frac{1}{2}\mathbb{I})|0\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle$ . Oni kondukas al ekvacio de dua grado  $a|0\rangle = 0$

$$0 = \langle \check{x}|a|0\rangle = \langle \check{x}|\check{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\check{x} + d_{\check{x}})\check{u}_0(\check{x}) = 0$$

$$(1/\check{u}_0)(\check{x})d_{\check{x}}\check{u} = -\check{x} \quad d_{\check{x}} \log(\check{u}_0(\check{x})) = -\check{x} \quad \log(\check{u}_0(\check{x})) = -\check{x}/2 + c \quad \check{u}_0(\check{x}) = ce^{-x^2/2}$$

$$Sp(N) = \mathbb{N}$$

$$Sp(H) = \left\{ \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \tag{6.7}$$

Para  $\check{u}_0(\check{x}) = \check{u}_0(\check{x})$

$$\check{u}_n(\check{x}) = \langle \check{x}|x\rangle = \langle \check{x}|\frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle = (\check{x} - d_{\check{x}})^n \frac{1}{\sqrt{n!}}\check{u}_0(\check{x})H_n(\check{x})e^{-\frac{\check{x}^2}{2}}$$

kie  $H_n$  estas la polinomoj de Hermite.  $\int \check{u}_0^2(\check{x})d\check{x} = 1$ .

## 6.5 Angulaj Momantoj

Ia objekto havas simetrio si estas nevarianta sub ia intervebla transformiĵo nomigita simetri transformiĵo. Por ĉia simetrio de la sistemo aŭ spaco oni havas invariancecon de simetrio. Se la sistemo estas **konserva** la objekto simetrias per temp translacioj. Se la spaco estas **omoĝena** la objekto simetrias per spac translacioj. Se la rapideco estas **isotropa** la objekto simetria per rotacioj. Do oni volas priskribi ia tratado ke kunigu la klaso de simetri transformiĵoj kun la unecaj operatoroj. Oni vidos kiel, kun la grupa teorio, oni povas kunigi kaj simpligi la tratado de la transformiĵojn.

Oni povas serĉi en la unecaj operatoroj  $U^\dagger U = \mathbb{I} = U U^\dagger$  la simetri transformiĵoj ĉar ili, kiel oni vidas en la Wigner-a teoremo, ne ŝanĝas la mez valoro de la operatoroj  $\|U|\psi\rangle\| = \langle U\psi|U\psi\rangle = \langle \psi|U^\dagger U|\psi\rangle = \|\psi\|$ . La unecaj operatoroj operas sur la mem-funkcio  $U|\psi\rangle$  aŭ sur la operatoro  $U^\dagger A U$ . La komposicioj de du unecaj operaroj estas la sumo de la du parametroj per ia fazo.  $U(s)U(s') = U(s + s')e^{i\theta(s,s')}$ . Per grupoj je unu parametro la fazoj povas esti elektita kiel nulo kaj la operatoroj formas grupon.

### 6.5.1 Mat: Grupo

Mat

La grupo  $(\mathcal{G}, \circ)$  estas aro kiu plitenas:

- I) La **neŭtra** elemento  $A \circ \mathbb{I} = A$
- II) la **inversa**  $\forall A \in \mathcal{G} \exists A^{-1} | A \circ A^{-1} = \mathbb{I}$
- III) **malferma** per komposicioj  $A_1 \circ A_2 \in \mathcal{G}$

La grupo povas havi subgrupojn kunigitaĵn. Si la kunigo estas [disgiunta] la grupo estas la sumo de ĉiuj la [laterali] de ia subgrupo  $\forall \mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}, G = \bigcup_j G_j \mathcal{G}_i$  kun  $G_j \in \mathcal{G}_i$  kaj  $G_i \mathcal{G}_i \in G_i$ .

Per la **|Stone-a Teoremo|** la operatoro uneca estas prezentigebla per iun ajn operatoron  $Q$

$$U(s) = e^{-isQ}$$

Oni povas fari **|Infinitezima Transformaĵo|** sur la operatoro  $U \simeq \mathbb{I} - sQ$  kie  $Q$  nun estas la **|Ĝeneratoro Infinitezima|**

$$Q = i\hbar d_s U(s) \Big|_{s=0}$$

- √ prefere la elemento de la algebro  $\mathfrak{U}$  obtenita pro la grupo  $\mathcal{G}$
- Grupoj Ekzistas la Grupo Ortogonala  $(\mathcal{O}_n)\mathcal{O}_n$  de la matricoj laŭ kiuj  $\tilde{\rho} = \mathbb{I}$  kiuj montras
- $\mathcal{O}_n \triangleright$  pluen.  $\tilde{\rho} = \rho^{-1}$  kiu estas grupo ĉar  $I) \mathbb{I}_n \in \mathcal{O}_n$   $II) \exists \rho^{-1} = \tilde{\rho}, \tilde{\rho}^{-1} \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{-1} \rho^{-1} = \mathbb{I}_n \in \mathcal{O}_n$ . Oni povas vidi ke tiu grupo estas dekomponebla en du lateraloj, oni do difinas
- $\mathcal{SO}_n \triangleright$   $(\mathcal{SO}_n)$  kiel tiu lateralo kiu havas  $\det \rho = 1$  do estas subgrupo. La grupo  $(\mathcal{U}_n)$  estas
- $\mathcal{U}_n \triangleright$  anstataŭe la grupo de la unecaj matricoj  $U^\dagger U = \mathbb{I}$  kun  $(\mathcal{SU}_n)$  sia sola subgrupo kun
- $\mathcal{SU}_n \triangleright$  determinanto unuas.
- △

### 6.5.2 Mat: Lie-a Algebro

Mat

Algebro di Lie  $\mathfrak{G}$  estas vektora spaco de finaj dimensioj havinte la komutatoro  $[A, B] = AB - BA$  kiu plidoni la **|Jacobi-a Identajxo|**

$$[a[b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [b, a]] = 0$$

Lie-a Algebro  $\triangleright$  (Lie-a Algebro)

$\mathfrak{O}$  estas la aro de ortogonalaj matricoj. Iu bazo estas donita per la sumo de la matricoj

$$\epsilon^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

√ Por la Stone-a teoremo oni povas uzi la bone notitaj operatoroj  $P, L, H$  pro pri-skribi la simetri transformajxon.

...

Oni kreas novan alĝebro formatan da  $\{\hat{J}_z, \hat{J}_\pm\}$  kie  $\hat{J}_\pm := \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$ .  $\hat{J}_\pm$  ne estas Hermite-aj ĉar  $\hat{J}_+^\dagger = \hat{J}_-$   $[J, J_\pm] = \pm \hbar \hat{J}_\pm$ .  $[\hat{J}_k, \hat{J}_l] = i\hbar \epsilon_{klm} J^m$   $[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = \hat{J}_z$ . Elektas oni bazo formata de memket de  $\hat{J}$ ,  $|m\rangle$ , rilata al la memvaloro  $m\hbar$   $m \in \mathbb{R}$   $\hat{J}|m\rangle = m\hbar|m\rangle$ . La ket rilata de  $\hat{J}$  donas per  $\hat{J}_\pm|m\rangle$  memket rilata de  $\hat{J}$  koresponda al la memvaloro  $(m \pm 1)\hbar$ . Por ĉiu numero intera o duon intera ekzistas **|Prezento Ne-Redukebla|** de Lie-a alĝebro de la angulara momentoj en Hilbert-a spaco de  $(2j + 1)$  dimensioj kaj en tia spaco la spektro de observebla  $\hat{J}_k|k = 1, 2, 3$  konstituas de la oplo  $\{m\hbar|m = -j, -j + 1, \dots, j\}$   $\hat{J}|j\rangle = j\hbar|j\rangle$   $\hat{J}_+|j\rangle = 0$   $\hat{J}\hat{J}_-|j\rangle = \hbar(j - k)\hat{J}_-|j\rangle$ . La bazo  $|m\rangle$  estas definata per la ket  $|j\rangle$  normagita tiel

per  $\langle j|j\rangle = 1$

$$|m - 1\rangle = \frac{J_-}{\sqrt{\hbar(j - m + 1)(j + m)}}|m\rangle$$

$$j^2 = \hat{J}_- \hat{J}_+ + \hbar \hat{J} + j^2$$

$[\hat{J}^2, \hat{J}_k] = 0$ . Ia Hilbert-a spaco prezentebblas per  $\mathcal{H} = \bigoplus_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{H}_j^{NR}$  tie  $NR$  signifas ne redukebla.  $\mathcal{J} = \mathbb{N}/2$   $k_j$  aŭ tovaloroj  $j(j + 1)\hbar^2$  de dimensio  $\dim \mathcal{H}_j^{NR} = 2j + 1$ . La memvaloroj de  $L$  estas  $l = j$ . Por determini  $\mathcal{J}, n_j$  oni devas solvi la ekvacioj laŭ la memvaloroj

$$\widehat{L}^2 f_{l,m} = \hbar l(l + 1) f_{l,m} \quad \hat{L} f_{l,m} = \hbar m f_{l,m} \quad (6.8)$$

Sciante ke  $\hat{L}_+ f_{l,l} = 0$   $\hat{L}_- f_{l,l} = \hbar l f_{l,l}$  por  $l = m$  kaj  $f_{l,m} \propto \hat{L}_-^{l-m} f_{l,l}$  oni povas determini la sukcesioj  $\{f_{-l}, , f_l\}$  kiu estas la memfunkcio de en prezento  $x$  de la memket  $\{|l, -l\rangle, |l, l-1\rangle, , |l, l\rangle\}$ , bazo kanona de  $\mathcal{H}_{NR}$   $\hat{\mathbf{L}}^2 f_{l,l} = (\hat{L}_- \hat{L}_+ \hat{L}_3^2 + \hbar L) f_{l,l} = \hbar^2 l(l+1) f_{l,l}$ . En prezento  $x$  oni eksprimas tiuj ekvacioj en polaraj koordinatoj.

$$\hat{L} = -i\hbar\partial_\phi \quad \hat{L}_\pm \hbar e^{\pm i\phi} (i\theta\partial_\phi \pm \partial_\theta) \quad (6.9)$$

La angularaj momentoj dependas sole de la angulara koordinatoj, sekve  $r$  estas kostanto arbitra. Faktoriĝante  $f_{l,l} = C_l(r) Y_l^l(\theta, \phi)$  do  $C_l(r) \in L^2((-\infty, \infty))$  kaj ĉi tiu aro estas estas Hilbert-a spaco separebla.

$$\begin{aligned} \|f_{l,l}\|^2 &= 1 \\ \int r^2 |C_l(r)|^2 dr &= 1 \\ \int |Y_l^l(\theta, \phi)|^2 \sin\theta d\theta d\phi &= 1 \end{aligned}$$

### 6.5.3 Angulaj Momentoj Sumo

Oni povas konsideri egale la totala angulara momento tiel sumo de momento orbita kaj de spin aŭ sumo de la orbita momento de du partikloj.

$$\mathcal{H}^{(a)} = \bigoplus_{j_a \in \mathcal{J}_a} n_j^{(a)} \mathcal{H}_j^{(a)}$$

### 6.5.4 Mat: Tensora Produkto

Oni definis la Tensora Produkto tiel

$$\mathcal{H}^\otimes = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)} = \bigoplus_{j_1 \in \mathcal{J}_1} \bigoplus_{j_2 \in \mathcal{J}_2} n_{j_1}^{(1)} n_{j_2}^{(2)} \mathcal{H}_{j_1}^{(1)} \otimes \mathcal{H}_{j_2}^{(2)}$$

Sekvas ke ĉiu operatoro agas sur sia spaco kaj la operatoro de totala angula momento estas la tensora produkto de ĉiuj operatoroj separe sur iliaj spacoj nereduकेblaj.

◁Tensora Produkto

$$|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = |m_1, m_2\rangle$$

$$J|m_1, m_2\rangle = (J^{(1)} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes J^{(2)}) (|j_1, m_1\rangle \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes |j_2, m_2\rangle) = \hbar|m_1, m_2\rangle$$

Ĉar  $(J^{(1)}|j_1, m_1\rangle) \otimes (\mathbb{I}|j_2, m_2\rangle) + (\mathbb{I}|j_1, m_1\rangle) \otimes (J^{(2)}|j_2, m_2\rangle) = (\hbar m_1|j_1, m_1\rangle) \otimes (\mathbb{I}|j_2, m_2\rangle) + (\mathbb{I}|j_1, m_1\rangle) \otimes \hbar m_2|j_2, m_2\rangle$

△

$$\widehat{\mathbf{J}}^2 = \widehat{\mathbf{J}}_{(1)}^2 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \widehat{\mathbf{J}}_{(2)}^2 + 2 \sum J_k^{(1)} \otimes J_k^{(2)}$$

Se oni havu  $J_1 = 1$  angula orbita momento kaj  $J_2 = 1/2$  angula momento de spin  $\{|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}$  estas bazo de  $\mathcal{H}_1^{NR}$  kaj  $\{|1/2, 1/2\rangle, |1/2, -1/2\rangle\}$  de  $\mathcal{H}_2^{NR}$  oni volas konstrui la bazo de  $\mathcal{H}^\otimes$ ,  $|1, 1\rangle \otimes |1/2, 1/2\rangle = |1, 1/2\rangle$ ,  $|1, 1\rangle \otimes |1/2, -1/2\rangle = |1, -1/2\rangle$  kaj aliaj sekvinte la ĝenera reglo

◁ $\widehat{\mathbf{J}}^2$   
√

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{j_1}^{(1)} \otimes \mathcal{H}_{j_2}^{(2)} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \mathcal{H}_j^{NR} \quad D = D_{j_1}^{(1)} \otimes \mathcal{H}_{j_2}^{(2)} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} D_j^{NR}$$

kui estas |Kompona Reglo de Angul Momentoj|. Do

$$Sp(\mathbf{J}^2) = \left\{ \hbar j(j+1) \mid j = |j_1 - j_2| \overset{++}{\rightarrow} j_1 + j_2 \right\} \quad Sp(\mathbf{J}) = \left\{ \hbar m \mid m = -j_1 - j_2 \overset{++}{\rightarrow} j_1 + j_2 \right\}$$

## 6.6 Angula Kompleta Bazo

Oni volas priskribi ia sistemo en la kompleta operatora bazo  $\{\hat{H}, \mathbf{L}^2, \hat{L}_z\}$  kiu havas en sia spektro  $\{n, l, m\}$ . Tia bazo estas tre utila kiale ofte aperas centralaj potencialaj kaj ĉiu operatoro komutas kun la Hamilton-a. En centra kampo Hamilton-a estas separebla kaj la ond funkcio faktoriĝebla en polaraj koordinatoj  $f(r, \phi, \theta) = R_{nl}(r) \sum_m Y_l^m(\phi, \theta)$   $\psi_{n_1, n_2, n_3} = Ae^{-\alpha r^2} H_{n_1}(\alpha x) H_{n_2}(\alpha y) H_{n_3}(\alpha z)$  Tie  $H_n$  estas la

**|Hermite-a Polinomio|.**

Oni povas priskribi  $q_x = r/2\sqrt{8/3\pi}(Y_1^1 - Y_1^{-1})$   $q_y = r/2\sqrt{8/3\pi}(Y_1^1 + Y_1^{-1})$   $q_z = r\sqrt{4/3\pi}Y_1^0$ .

La memvaloroj de la energio estas  $\mathcal{E}_n = \hbar/\omega(3/2 + n)$  tie  $n = n + n + n$ .

De ia bazo al la alia, pareco pluteniĝas, do  $(-1)^n = (-1)^l$ .

En Hilbert-a spaco vektoroj estas prezentigeblaj en  $\psi(x, 0) = c_n\psi^n(x)$   $c_n^2 = \int \psi_n\psi(x, 0)dx$

$$|n\rangle = \sum_{m=-l}^l c_m|lm\rangle \quad c_m = \langle lm|n\rangle$$

Oni povas kalkuli la probablo de la memstato  $m$  por ia ond funkcio kiu ne dependas sole por  $r$  per la kvar sumo de ĉiuj rilataj koeficientoj kiuj multiplikas la sfer harmonikaj  $Y_l^m$ .  $f(q_x, q_y, q_z) = h_natu(r) \sum c_m Y_l^m$   $Pr(m) = c_m^2 / \sum c_m^2$

### 6.6.1 Prezento Matrica de la Lie-a Algebro de la Angul Momentoj

Nun oni scias ke la operatoroj  $J^2$  kaj  $J_z$  agas sur siajn propr memfunkciojn tie:

$$L^2|l, m\rangle = l(l+1)|l, m\rangle \quad \wedge \quad L_z|l, m\rangle = m|l, m\rangle$$

pluen oni scias la agon de la operatoroj  $L_{\pm}$  sur la statoj  $|lm\rangle$

$$L_{\pm}|l, m\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}|l, m \pm 1\rangle \quad L_{\pm} = L_x \pm iL_y$$

Nun oni volas konstrui la matrican prezenton per tiu operatoroj  $D^{(l)}$  kalkulebla per

$$(D_i^{(l)})_{mm'} = \langle lm|L_i|l, m'\rangle$$

Tiu oni donas la posiblecon de konstrui prezenton ne redukeblan sur kiu konstrui ĉiuj aliaj prezenton.

Kalkulinte oni obtenas

$$D_1^{(1/2)} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D_2^{(1/2)} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad D_3^{(1/2)} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

kiuj estas la **|Pauli-a Matrico|** kaj bazo de la algebro  $SU_2$ . En tiu prezento oni havas gravaj ecoj en la termoj de la kostantaj strukturoj

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij} \quad [\sigma^i, \sigma^j] = \epsilon^{ijk}\sigma_k \quad \sigma^{i*} = -\sigma^2\sigma^i\sigma^2 \quad -\tilde{\sigma}^i = \sigma^2\sigma^i\sigma^2$$

La prezento por la memvaloro  $l = 1$  estas:

$$D_1^1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D_2^1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad D_3^1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Oni povas priskribi la sistemo en malegalan bazon. Oni devas esprimi la vektoroj de unu bazo el tiuj de la alia. ĉiu vektoro estas la sumo de ĉiaj vektoroj de la alia bazo multiplikitaj per koeficientoj nomataj **|Clebsch-Gordan-a Koeficientoj|**.

Clebsch-Gordan

$l = 1, s = 1/2$  La vektoro

$$|j, m_j\rangle = \sum_{l,s|l+s=j} c_{l,s}|l, s\rangle$$

do oni scias ke  $|3/2, 3/2\rangle = |1, 1/2\rangle$  kiam  $|3/2, 1/2\rangle = \alpha|1, -1/2\rangle + \beta|0, 1/2\rangle$ . Sciante ke  $J_-|3/2, 3/2\rangle = \sqrt{3}|3/2, 1/2\rangle$  oni povas serci  $\alpha, \beta$  pro kiuj

$$J_{\mp}|3/2, \pm 3/2\rangle = (L_{\mp} + S_{\mp})|1, 1/2\rangle \quad |3/2, 1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|0, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1, -1/2\rangle$$

$$|3/2, -1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|0, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|-1, 1/2\rangle$$

Pro la ortonormaleco

$$\langle 3/2, 1/2 | 1/2, 1/2 \rangle = 0 \quad |1/2, 1/2\rangle = |3/2, 1/2\rangle^\perp = \sqrt{\frac{1}{3}}|0, 1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -1/2\rangle$$

Pluen

$$|-1, 1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|3/2, 1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2, -1/2\rangle$$

Oni povas ankaŭ esprimi la koeficientoj de la bazo  $\{L^2, L_z\}$  al la bazo  $\{L_x, L_y\}$ . Se  $l = 1$  kaj oni havas  $L_z|m\rangle = m|m\rangle$  kaj  $L_y|m_y\rangle = m_y|m_y\rangle$ .  $|m_y\rangle = \alpha|1\rangle_z + \beta|0\rangle_z + \gamma|-1\rangle_z$

$$L_y|m_y\rangle = L_y(\alpha|1\rangle_z + \beta|0\rangle_z + \gamma|-1\rangle_z) = m_y(\alpha|1\rangle_z + \beta|0\rangle_z + \gamma|-1\rangle_z)$$

$L_y = (L_+ - L_-)/2i$ . Kalkulinte

$$|m\rangle_y = \frac{1}{2i}|1\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_z - \frac{1}{2i}|-1\rangle_z$$

Por obteni  $|m\rangle_x$  oni povas rotigi:

$$e^{\frac{-L_z\pi}{\hbar}}|m\rangle_y = |m\rangle_x = \frac{1}{2}|1\rangle_z + \sqrt{\frac{1}{2}}|0\rangle_z + \frac{1}{2}|-1\rangle_z$$

Oni do volas montri ankaŭ

$1/2 \otimes 1/2$	$ 1\ 1\rangle$	$ 1\ 0\rangle$	$ 0\ 0\rangle$	$ 0\ -1\rangle$
$ 1/2\ 1/2\rangle$	1			
$ +\ -\rangle$		$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$	
$ -\ +\rangle$		$\sqrt{1/2}$	$-\sqrt{1/2}$	
$ -\ -\rangle$				1

△

## 6.7 Ond funkcioj normaligitaj por idroĝena atomo

$$\rho = Zr/a_0 \quad a_0 = 0.592\text{\AA} \quad A = (Z/a_0)^{3/2}$$

OndFunkcioj

n	l	m			
1	0	0	$\psi_{1s} = A$	$e^{-\rho}$	$/\sqrt{\pi}$
2	0	0	$\psi_{2s} = A$	$(2 - \rho)e^{-\rho/2}$	$/\sqrt{32\pi}$
2	1	0	$\psi_{2p_z} = A$	$\rho e^{-\rho/2}$	$\cos(\theta) / \sqrt{32\pi}$
2	1	-1	$\psi_{2p_y} = A$	$\rho e^{-\rho/2}$	$\sin(\theta) \sin(\phi) / \sqrt{32\pi}$
2	1	1	$\psi_{2p_x} = A$	$\rho e^{-\rho/2}$	$\sin(\theta) \cos(\phi) / \sqrt{32\pi}$
3	0	0	$\psi_{3s} = 2A$	$(27 - 18\rho + 2\rho^2)e^{-\rho/3}$	$/81\sqrt{3\pi}$
3	1	0	$\psi_{3p_z} = 2A$	$e^{-\rho/3}$	$\cos(\theta) / 81\sqrt{3\pi}$
3	1	-1	$\psi_{3p_y} = 2A$	$(6\rho - \rho^2)e^{-\rho/3}$	$\sin(\theta) \sin(\phi) / 81\sqrt{3\pi}$

je la proksiman paĝon

Ondfunkcioj							
3	0	1	$\psi_{3p_x} = 2A$	$(6\rho - \rho^2)e^{-\rho/3}$	$\sin(\theta) \cos(\phi)$	$/81\sqrt{3\pi}$	
3	2	0	$\psi_{3d_{z^2}} = A$	$\rho^2 e^{-\rho/3}$	$(3 \cos^2(\theta) - 1)$	$/81\sqrt{6\pi}$	
3	2	-1	$\psi_{3d_{yz}} = \sqrt{2}A$	$\rho^2 e^{-\rho/3}$	$\sin(\theta) \cos(\theta) \sin(\phi)$	$/81\sqrt{6\pi}$	
3	2	1	$\psi_{3d_{xz}} = \sqrt{2}A$	$\rho^2 e^{-\rho/3}$	$\sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\phi)$	$/\sqrt{32\pi}$	
3	2	-2	$\psi_{3d_{xy}} = A$	$\rho^2 e^{-\rho/3}$	$\sin^2(\theta) \sin(2\phi)$	$/81\sqrt{2\pi}$	
3	2	2	$\psi_{3d_{x^2-y^2}} = A$	$\rho^2 e^{-\rho/3}$	$\sin^2(\theta) \cos(2\phi)$	$/81\sqrt{2\pi}$	

## Mez Valoroj

$$\begin{aligned}
 \langle r \rangle &= n^2 a_0 (3/2 - l(l+1)/2n^2) / 2Z & \langle r^2 \rangle &= n^4 a_0^2 (3/2 - l(l+1)/2n^2) / 2Z \\
 \langle r^{-1} \rangle &= Z / a_0 n^2 & \langle r^{-2} \rangle &= Z^2 e^2 / a_0^2 n^3 (l+1/2) \\
 \langle r^{-3} \rangle &= Z^3 / a_0^3 n^3 (l+1/2)(l+1) & \langle \mathcal{V} \rangle &= -Z^2 e^2 / a_0 n^2 \\
 \langle T \rangle &= Z^2 e^2 / 2a_0 n^2
 \end{aligned}$$

### 6.7.1 Libera Partiklo

La tri komponoj de  $\hat{P}$  estas traslacia nevariantoj:  $e^{\hat{P}\mathbf{a}/\hbar} \hat{P} e^{-\hat{P}\mathbf{a}/\hbar} = \hat{P}$  kiele por  $\hat{H}$ , funkcio de  $\hat{P}$ .  $H$  estas kvar proporcia al  $\hat{P}$  do estas ankaŭ rotacio nevarianta

$$e^{\mathbf{w}\hat{L}/\hbar} \frac{\hat{P}^2}{2m} e^{-\mathbf{w}\hat{L}/\hbar} = \frac{\hat{P}^2}{2m}$$

Oni volas nun diagonaligi la bazo en la novaj koordinatoj aŭ malkovri

$$\psi_{\mathcal{E},n,m}(r, \phi, \theta) = \langle r, \theta, \phi | \psi \rangle$$

$\hat{P}_r = -\frac{\hbar}{r} \partial_r$  Hermite-a

Konitaĵ la ekvacioj,  $[H\psi_{\mathcal{E},n,m}](r, \phi, \theta) = \mathcal{E}\psi_{\mathcal{E},n,m}(r, \phi, \theta)$   $[\hat{L}^2\psi_{\mathcal{E},n,m}](r, \phi, \theta) = \hbar^2 l(l+1)\psi_{\mathcal{E},n,m}(r, \phi, \theta)$   $[L\psi_{\mathcal{E},n,m}](r, \phi, \theta) = m\hbar\psi_{\mathcal{E},n,m}(r, \phi, \theta)$ , oni prezentas per la memvaloroj  $\{\mathcal{E}, n, m\}$  sciante ke  $\hat{P}^2$  estas prezentigebla per  $\hat{P}_r^2 + \hat{R}^{-2}\hat{L}^2$  oni devas solvi la **[Radia Ekvacio]**

$$\left( -\hbar \frac{1}{r} \partial_r^2 r + \hbar^2 \frac{l(l+1)}{r^2} - 2m\mathcal{E} \right) h_{\mathcal{E}l}(r) = 0 \quad (6.10)$$

$m$  nedepena pravige rotacia nedepeno.

## 6.8 Kaŭza Evoluo

La kaŭza evoluo estas priskribebla per uneca operatoro

$$\hat{U}(t) := e^{\frac{\hat{H}t}{\hbar}}$$

kie  $\hat{H}$  estas la Hamilton-a operatoro. Oni povas vidi la kaŭza evoluo kiel evolado de la operatoro (Heisenberg-a vidado), kiel evolado de la ondfunkcio (Schrödinger-a vidado) aŭ interado inter la duoj.



### 6.8.1 Schrödinger-a Vidado

La Hamilton-a operatoro evolvas la ond funkcion

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{\hat{H}t}{\hbar}}|\psi(0)\rangle \quad \hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

### 6.8.2 Heisenberg-a Vidado

La evoluado ŝanĝas la operatoron

$$\hat{U}(t)\hat{O}(0)\hat{U}^{-1}(t) = e^{-\frac{\hat{H}t}{\hbar}}\hat{O}(0)e^{\frac{\hat{H}t}{\hbar}} = \hat{O}(t) \quad i\hbar\partial_t\hat{O}_H(t) = e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}[\hat{O}_S, H]e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} = [\hat{O}_H, H]$$

### 6.8.3 Interad Vidado

Si oni havas Hamilton-a tipe  $H = H_0 + V$  kie  $H_0$  estas bone notita Hamilton-a operatoro kies oni konas la solvado oni povas interadas inter la du vidadoj. Specifike la ond funkcio kaj la operatoro evoluas per

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{\frac{\hat{V}t}{\hbar}}|\psi(0)\rangle \quad \hat{O}_I(t) = e^{-\frac{\hat{H}_0t}{\hbar}}\hat{O}_S(0)e^{\frac{\hat{H}_0t}{\hbar}} = i\hbar\partial_t\hat{O}(t) = [\hat{O}_I(t), \hat{H}_0]$$

(Temp dipenda Potencialo) Si  $H = H_0 + V(t)$  kaj  $V(t)$  estas malgranda oni povas <Temp dipenda Potencialo proksimiĝi la solvado tiel:

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{H_0t}{\hbar}}|\psi_I(t)\rangle$$

pro la Schrödinger-a ekvacio:

$$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = H_0e^{\frac{H_0t}{\hbar}}|\psi_I(t)\rangle + i\hbar e^{\frac{H_0t}{\hbar}}\partial_t|\psi_I(t)\rangle = (H_0 + V)e^{\frac{H_0t}{\hbar}}|\psi_I(t)\rangle$$

kune kun

$$i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = V_I(t)|\psi_I(t)\rangle$$

Nun oni povas solvi rikursive

$$\psi_I(t) = \psi_I(t_0) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t')\psi_I(t')dt'$$

tiel:

$$\psi_I(t_1) = \psi_I(t_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \left( -\frac{i}{\hbar} \prod_{j=1}^i \left( \int_{t_0}^{t_j} dt_i V_I(t_j) \right) \right) \psi(t_0)$$

### 6.8.4 Matsubara Vidado

La Matsubara vidado estas la unika ne uneca operatoro de evoluo kaj estas ofte uzita por porti la sistemon al la dezirita temperaturo. Tiu vidado estas simila al la Heisenbeg-a kaj estas difinita per

$$\hat{K} := \hat{H} + \mu\hat{N} \quad \hat{K}_0 := \hat{H}_0$$

$$\hat{O}_M(\tau) = e^{\hat{K}\tau}\hat{O}_S e^{-\hat{K}\tau} \quad \hat{O}_M(\tau) = e^{\hat{K}\tau} e^{-\hat{K}_0\tau} \hat{O}_I(\tau) e^{\hat{K}_0\tau} e^{-\hat{K}\tau}$$

kaj oni povas difini la operatoro de evoluo

$$U_M(\tau_1, \tau_2) := e^{\hat{K}_0\tau_1} e^{-\hat{K}(\tau_1-\tau_2)} e^{-\hat{K}_0\tau_2}$$

Tiu difino portas al la perturbatan priskribon similan al la interad vidado.

### 6.8.5 Fermi-a Aurea Reglo

La Fermi-a aurea reglo uzitas por kalkuli la probablon de transiro inter du statoj al la unua aproksimeco.

Oni havas ne perturbitan staton al tempo  $t = 0$ . Si oni [accende] perturbaĵon oni volas koni la probablon de transiro inter du memstatoj aŭ la efekto de la perturbaĵo sur la sistemo.

Je  $t = 0$  la partiklo ĉeestas en la stato  $|i\rangle$ , oni volas nun koni la probablo ke tiu partiklo transiras, ekzemple, al la stato  $|f\rangle$  do

$$c_f(t) = \langle f | \psi(t) \rangle = \langle f | e^{-\frac{E_f t}{\hbar}} | \psi(t) \rangle = \langle f | e^{-\frac{H_0 t}{\hbar}} | \psi(t) \rangle = \langle f | \psi_I(t) \rangle$$

kie  $\psi_I$  estas la ond funkcio en la interada vidado.

Estinte per la unua ordo en  $V_I$

$$|\psi_I(t)\rangle = |\psi_I(0)\rangle + \int_0^t dt' V_I(t') |\psi_I(0)\rangle$$

do la koeficanto  $c_f(t)$  estas kalkulebla per

$$c_f(t) = \langle f | \psi_I(t) \rangle = \langle f | i \rangle + \int_0^t dt' \langle f | e^{-\frac{H_0 t'}{\hbar}} V(t') e^{\frac{H_0 t'}{\hbar}} | i \rangle = \int_0^t dt' \langle f | V(t') | i \rangle e^{\frac{(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f)t'}{\hbar}}$$

do la denseco probablo estas

$$\mathcal{P}_{fi}(t) = |c_f(t)|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t dt' \langle f | V(t') | i \rangle e^{\frac{(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f)t'}{\hbar}} \right|^2$$

Kostanta Potencialo

$$V(t) = V$$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\hbar^2} |V_{fi}|^2 \left| \frac{e^{\frac{(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f)t}{\hbar}} - 1}{\frac{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f}{\hbar}} \right| = \frac{1}{\hbar^2} |V_{fi}|^2 t^2 \text{sinc}\left(\frac{\omega_{fi} t}{2}\right)$$

La funkcio  $\text{sinc}(\omega) := \text{sen}(\omega)/\omega$ , kiel supren notita, havas alta [picco] por  $\omega = 0$  aŭ  $\mathcal{E}_f = \mathcal{E}_i$  kaj havas largecon  $4\pi/t$  la aliaj [picchi] dekreskas tiel  $(\mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i)^2$  kaj havas  $\triangle$  largecon  $2\pi/t$ .

Armonika Perturbado Pro tiu, per  $t$  granda la funkcio sinc estas simila al la simbola funkcio de la  $\delta(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f)$ .  
La potencialo

$$V(t) = V_0^*(r) e^{i\omega t} + V_0^* e^{-i\omega t}$$

interadas kun la atomo donante probablon de transiro al la elektono.

$$\mathcal{P}_{fi}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| V_{fi} e^{i\frac{\omega_{fi} - \omega}{2} t} t \text{sinc}\left(\frac{\omega_{fi} - \omega}{2} t\right) + V_{fi}^* e^{i\frac{\omega_{fi} + \omega}{2} t} t \text{sinc}\left(\frac{\omega_{fi} + \omega}{2} t\right) \right|^2$$

la “mista” termo estas “traskurebla” kaj oni povas vidi kiel supren ke la probablo de la transiro depenas de la frekvenco  $\omega$  en la formo

$$W_{fi}(\omega) = \frac{2\pi}{\hbar} \left( |\langle f | V_0 | i \rangle|^2 \delta(\mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i - \hbar\omega) + |\langle f | V_0^* | i \rangle|^2 \delta(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f + \hbar\omega) \right)$$

La unua termo montras la adsorb proceson kiam la dua montras la elmiton stimuli-  
 $\triangle$  tan pro la fotono.

## 6.9 Perturbadoj

Si oni havas bone konita Hamilton-a  $H_0$  pli ia malgranda termo  $\lambda V$  kiu oni ne scias solvi oni skribas la perturbataj ond funkcioj kiel sumo de la termoj de la neperturbataj. La Hamilton-a estas  $H = H^0 + \lambda V$  kaj iliajn solvadoj  $H_0|\phi_n^0\rangle = \mathcal{E}_n^0|\phi_n^0\rangle$  kaj  $H|\phi_n\rangle = \mathcal{E}_n|\phi_n\rangle$  kaj oni volas skribi la perturbata energio kiel sumo de la  $\lambda$  potencoj de la neperturbata energio

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}^{(0)} + \sum_{i=1} \lambda^i \mathcal{E}^{(i)} \quad |\phi_n\rangle = \sum_{n=0} \lambda^n |\phi^{(n)}\rangle$$

$(\mathcal{E}_n - H^0 - \lambda V)|\phi_n\rangle = 0$   $(\mathcal{E}_n - H^0)|\phi_n\rangle = \lambda V|\phi_n\rangle$   $|\phi_n\rangle = (\lambda V)/(\mathcal{E} - H^0)|\phi_n\rangle$ . Oni volas elekti normaligaĵon kiu permetas  $\langle\phi_n^0|\phi_n^0\rangle = 1$  kaj  $\langle\phi_n^0|\phi_n\rangle = 1$  mode ke

$$|\phi_n\rangle = \sum_i \lambda^i |\phi_n^{(i)}\rangle$$

$$|\phi_n\rangle = |\phi_n^0\rangle\langle\phi_n^0|\phi_n\rangle + \sum_{m \neq n} |\phi_m^0\rangle\langle\phi_m^0|\phi_n\rangle = |\phi^0\rangle + \sum_{m \neq n} \left( \langle\phi_m^0|\frac{\lambda V}{\mathcal{E} - H^0}|\phi_n\rangle \right) |\phi_m^0\rangle$$

$\sum_{m \neq n} \langle\phi_m^0|\frac{\lambda V}{\mathcal{E} - H^0}(|\phi_n^0\rangle + \sum_{l \neq n} \langle\phi_l^0|\frac{\lambda V}{\mathcal{E} - H^0}|\phi_n\rangle)$  do rikorsive:

$$|\phi_n^0\rangle = |\phi^0\rangle + \sum_{k=1} \frac{\lambda^k \langle n^0|V^k|n^0\rangle}{(\mathcal{E} - H^0)^k} |\phi_n^0\rangle$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_n^0 &= \mathcal{E}_i^0 - \mathcal{E}_n^0 + \lambda V + \lambda^2 \dots = \\ &= (\mathcal{E}_i^0 - \mathcal{E}_n^0) \left( 1 + \frac{\lambda V + \lambda^2 \dots}{\mathcal{E}_i^0 - \mathcal{E}_n^0} \right) \simeq \\ &\simeq \mathcal{E}_i^0 - \mathcal{E}_n^0 \end{aligned}$$

La memvaloroj de la energio estos:

$$\langle n|V^k|n\rangle = (\langle n|V|n\rangle)^k$$

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n^0 + \lambda \langle n^0|V|n^0\rangle + \sum_{m \neq n} \lambda^2 \frac{(\langle m^0|V|n^0\rangle)^2}{\mathcal{E}_m^0 - \mathcal{E}_n^0} + \dots$$

## 6.10 Variacioj Linearaj

Si oni havas interado inter la partikloj, kaze de Coulomb-a interadoj inter elektronoj kaj nukleoj, oni povas serci la solvadan kiu minimigas la Hamilton-a.

$$H = \sum_i \left( -\frac{\hbar \nabla_i}{2m} + V_{ekst}(r_i) \right) + \frac{1}{\alpha} \sum_{i,j|i \neq j} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}$$

La |**Teoremo Variacionala**| oni diras ke por iu ajn stato  $|\psi\rangle$

$$\frac{\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \geq \mathcal{E}_0$$

La egaleco valoras sole en la fundamenta stato. Sekvinte la |**Hartree-a Proksimado**| oni priskribas la ond funkcion totalan de la sistemo  $|\Psi\rangle$  kiel faktorigo de singlaj ond funkcioj

$$\Psi_{\underline{\sigma}}(\mathbf{r}) = \underline{\psi}_{\underline{\sigma}}(\mathbf{r}) = \underline{\psi}(\mathbf{r})\underline{\xi}(\sigma)$$

Nun oni scias ke la ond funkcio de la fundamenta stato minimigas la Hamilton-a mez valoro kiu povas esti reformulita per la nuligo de la variacio de la fundamenta energio  $\delta\mathcal{E}_0^H = 0$  per ĉiu variacio de la ond funkcio  $\delta\phi$ . Pluen oni volas poni Lagrange-an multiplikatoron kiu petas la ortonormaleco de la ond funkcio

$$\begin{aligned} \delta \left( \mathcal{E}^H - \sum_{ij} \lambda_{ij} \left( \int d^3r \psi_{n_i}^*(\mathbf{r}) \psi_{n_j}(\mathbf{r}) - \delta_{ij} \right) \right) &= \\ = \delta \left( \mathcal{E}^H - \sum_i \lambda_i \left( \int d^3r \psi_{n_i}^*(\mathbf{r}) \psi_{n_i}(\mathbf{r}) - 1 \right) \right) &= 0 \end{aligned}$$

Kie oni havas farita transformon unecan kiu alportas al diagonala prezento. En la antaŭa ekvacio oni sobsituas la ond funkcion kun suma variacia termo  $\psi \rightarrow \psi + \alpha\delta\psi$  kaj plitenas sole la linearaj termoj.

$$\alpha \left( \int d^3r \delta\psi_{n_k}^*(\mathbf{r}) \left( \left( -\frac{\nabla^2}{2} + \mathcal{V}_{ekst}(\mathbf{r}) \right) \psi_{n_k} + \sum_{j \neq k} \int d^3r' \psi_{n_j}^*(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \psi_{n_k}(\mathbf{r}) \psi_{n_j}(\mathbf{r}) - \mathcal{E}_k \psi_{n_k} \right) \right) = 0$$

Tiu valoru por ĉiu  $\delta\psi^*$  prefere

$$\left( -\frac{\nabla^2}{2} + \mathcal{V}_{ek}(\mathbf{r}) + \sum_{j \neq i} \int d^3r' \frac{\phi_j^*(\mathbf{r}) \psi_j(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \psi_i(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_i \psi_i(\mathbf{r})$$

## 6.11 Kampa Kvantigo

Oni volas, en tiu sekcio, priskribi sistemon kiel senfina produkto de memstatoj de ia **[Hamilton]**-a kiuj povas esti okupitaj de partikloj. Oni devas do trovi la operatorojn de kreo kaj detruo kiuj ponu la partikloj en iu memstato. Do oni havos

- Hamilton-a  $H$  de la sistemo
- Ond funkcio  $\psi(\underline{\mathbf{x}})$  ond funkcio de la sistemo faktorigebla en ond funkcioj de singla partiklo  $\phi_i(\mathbf{x}_i)$

$$\psi(\underline{\mathbf{x}}) = \sum_i^N c(\underline{\mathcal{E}}_i, t) \phi_{\underline{\mathcal{E}}_i}(\mathbf{x})$$

Tiu funkcio sub la operatoro de intersaŝo  $\hat{P}$  priskribu sistemon de Bose-oj (+) aŭ Fermi-oj (-)

$$\hat{P}_{ij} \psi(\underline{\mathbf{x}}_{ij}) = \pm \psi(\underline{\mathbf{x}}_{ji})$$

- Unu operatoro de kreo  $\hat{a}^\dagger$  kaj unu de detruo  $\hat{a}$  kiuj sekvas la sekvantaj alĝebraj relacioj

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger]_{\pm} = \delta_{ij} \quad [a_i, a_j]_{\pm} = [a_i^\dagger, a_j^\dagger]_{\pm} = 0$$

Pluen oni povas difini Hermite-a operatoro  $\hat{N}$  kies memfunkcioj estas la ond funkcioj de singla partiklo.

$$\hat{N}^\dagger = \hat{N} := \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad \hat{N}_i \phi_{\mathcal{E}_n}(\mathbf{x}_n) = \hat{N} |n\rangle = n |n\rangle$$

La kampa kvantigo estus kreita per formado de novaj operatoroj

$$\hat{O} = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_i^\dagger \langle i | O | j \rangle a_j$$

### Simetrika, Kontraŭsimetrika

Oni havas  $N$  partikloj ke oni volas priskribi per faktoriĝo de la singlaj ond funkcioj.

$$\psi(\underline{\mathbf{x}}, t) = \sum_{\underline{\mathcal{E}}} c(\underline{\mathcal{E}}, t) \phi_{\underline{\mathcal{E}}}(\mathbf{x})$$

Si oni parolas de Fermi-onoj oni devas konsideri ke la memstato  $|\mathcal{E}_i\rangle$  povas esti aŭ ne esti okupita kaj la totala ond funkcio  $\psi(\underline{\mathbf{x}}, t)$  devas esti komplete antisimetrika.

I) Per la Bose-oj la ond funkcio devas esti kompleksive simetrika. Se la memstato  $|\mathcal{E}_i\rangle$  havas numero de okupado  $n_i$  do la koeficanto  $c(\underline{\mathcal{E}}, t)$  estu egala pro la  $1/N!$  interŝanĝo de partikloj. Se la nivelo  $\mathcal{E}_i$  estas okupita por  $n_i$  partikloj, kiuj havas la saman ond funkcio, la kalkulo de la multpleco de la koeficanto  $c(\underline{\mathcal{E}}, t)$  estas do:

$$\sum_{\underline{\mathcal{E}} @ \underline{n}}^N 1 = \frac{N!}{\underline{n}!}$$

Do noi povas esprimi  $c(\underline{\mathcal{E}}, t)$ , anstataŭ ke per la ebla energioj  $\underline{E}$  per la okupadoj de tiuj niveloj

$$\sum_{\underline{\mathcal{E}}} |c'(\underline{\mathcal{E}}, t)|^2 = \sum_{i @ \underline{n}_i}^{\infty} |c(\underline{n}, t)|^2 \frac{N!}{\underline{n}!}$$

Si oni volas trovi ond funkcion komplete antisimetrika oni povas vidi ke

$$\phi_{\underline{n}}(\underline{x}) := \sqrt{\frac{\underline{n}!}{N!}} \sum_{\underline{\mathcal{E}} i @ \underline{n}_i} \Phi_{\mathcal{E}_i}(\underline{x}) \quad (\phi_{\mathcal{E}_i}(\underline{x}), \phi_{\mathcal{E}_j}(\underline{x})) = \delta_{ij} \quad \psi = \sum_{\underline{n}}^{\infty} f(\underline{n}, t) \phi_{\underline{n}}(\underline{x})$$

II) Per la Fermi-oj la stato povas esti sole okupita aŭ ne okupita sed la kalkulo farita supro plitenas ĉar  $\sum_i \underline{n}_i = 1$ . Nun la ondfunkcioj devas esti komplete antisimetrika do si

$$\psi = \sum_{\underline{n}}^1 c(\underline{n}, t) \sqrt{\frac{\underline{n}!}{N!}} \sum_{\underline{E}} -^P \phi_{\underline{E}}(\underline{x}) = \sum_{\underline{n}} c(\underline{n}, t) \phi_{\underline{n}}(\underline{x})$$

oni kreas la komplete kontraŭsimetrika funkcio  $\phi_{\underline{n}}(\underline{x})$  kiel

$$\phi_{\underline{n}}(\underline{x}) = \sqrt{\frac{1}{N! \underline{n}!}} \begin{vmatrix} \phi_{\mathcal{E}_1}(\mathbf{x}_1) & \dots & \phi_{\mathcal{E}_1}(\mathbf{x}_N) \\ \dots & \dots & \dots \\ \phi_{\mathcal{E}_N}(\mathbf{x}_1) & \dots & \phi_{\mathcal{E}_N}(\mathbf{x}_N) \end{vmatrix}$$

## Kampa Operatoroj

Kun la opearotoj de kreo  $\hat{a}^\dagger$  kaj detruo  $\hat{a}$  oni povas poni  $n_i$  partikloj en la stato  $\mathcal{E}_i$

$$\frac{(a_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |0\rangle = |0_1, \dots, n_i, \dots, 0_N\rangle$$

La operatoro  $N_i = a_i^\dagger a_i$  estas do la operatoro numero departikloj en la nivelo  $\mathcal{E}_i$  do  $N = \sum_i n_i$ . La Hamilton-a operatoro devas esti funkcio de  $a, a^\dagger$ . Nur la ondfunkcioj devenas operatorojn dume la operatoroj skalarajn aŭ diferencialajn kiu komutas kun la kampa operatoroj.

$$\hat{\psi}(x) = \sum_i \phi_{\mathcal{E}_i}(x) \hat{a}_i \quad \hat{\psi}(x)^\dagger = \sum_i \phi_{\mathcal{E}_i}^*(x) \hat{a}_i^\dagger$$

La Hamilton-a devenas

$$\hat{H} = \sum_{ij} a_i^\dagger \langle i|T|j\rangle a_j + \frac{1}{2} \sum_{ijkl} a_i^\dagger a_j^\dagger \langle ij|V|kl\rangle a_l a_k$$

prefere

$$\hat{H} = \int d^3x \hat{\psi}^\dagger(x) \left( -\frac{\nabla^2}{2m} + U(x) \right) \hat{\psi}(x) + \frac{1}{2} \int d^3x d^3x' \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}^\dagger(x') V(x, x') \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x')$$

Ĝenere si oni volas skribi vektoron en kvampa kvantigo formo oni operas tiel

$$J(\mathbf{x}) \mapsto \sum_{ij} \langle i|J|j\rangle a_i^\dagger a_j^\dagger = \sum_{ij} \int d^3x \psi_i^*(x) J(x) \psi_j(x) a_i^\dagger a_j^\dagger$$

La variablo  $x$  povas prezenti la vektoro  $\mathbf{x}$  aŭ la kvar vektoro  $(\mathbf{x}, t)$ . En la sekvanta priskribo la traktado de la kvarvektoroj ne sekvas la relativeca metriko ĉar oni traktos de malrapidaj partikloj. Si oni volas priskribi la kaŭzan evoluon oni uzas pli bone la Heisenberg-a vidado laŭ kiu

$$i\partial_t \hat{\psi}^H(x, t) = \hat{H} \hat{\psi}^H(x, t) \quad \hat{\psi}^H(x, t) = e^{-\frac{iH}{\hbar} t} \psi^H(x, t) e^{\frac{iH}{\hbar} t}$$

### Mat 6.11.1 Mat: Green-a Funkcio

Si oni havas diferencialan ekvacion de kiu oni ne konas la solvado  $\phi(x)$  por solvi la sekvanta ekvacio

$$L(\partial_x)\phi(x) = f(x)$$

kie  $L(\partial)$  estas diferenciala operatoro, oni uzas la **Green-a** funkcio difinita per

$$L(\partial'_x, \partial'_t)G(x', t') = \delta(x')\delta(t')$$

Ofte oni povas transformi la Green-a funkcio en la spaca frekvenca domino por transformi la diferencialan operatoron  $\partial$  en la produkto kun  $k$ . Finfine por solvi la diferencialan ekvacion oni devas inverti la Green-an funkcio.

Oni povas ankaŭ difini la Green-a funkcio kiel

$$iG_{\alpha\beta}(\mathbf{x}t, \mathbf{x}'t') = \frac{\langle \psi_0 | T[\hat{\psi}_{H\alpha}(\mathbf{x}t) \hat{\psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{x}'t')] | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle}$$

La Green-a funkcio estas tre utila ĉar permetas kalkuli la mez valoron de la operatoro, la fundamentalan energion kaj la spektro de la ekscito. ĉiu operatoro estas kalkulebla per la Green-a. La  $\hat{T}$  operatoro estas la operatoro de tempa ordo ke signifas ke la kampa operatoroj devas esti skribita en la korekta tempa ordo, formule

$$\hat{T}[\hat{\psi}(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}', t')] = \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}', t') \psi(\mathbf{x}, t) \theta(t - t') \pm \psi(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}', t') \theta(t' - t)$$

kie  $\pm$  [distinguas] inter Bose-aj kaj Fermi-aj. Si oni havas operatoron  $\hat{j}(\mathbf{x})$  de singla partiklo sia koresponda en kvampa kvantigo estas  $\hat{J}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha\beta} \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}) j_{\alpha\beta} \psi_\alpha(\mathbf{x})$ . Uzinte la Green-a funkcio oni skribos

$$\begin{aligned} \langle \hat{J} \rangle &= \frac{\langle \Psi_0 | \hat{J} | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} = \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \sum_{\alpha\beta} j_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \frac{\langle \Psi_0 | \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}') \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \\ &= \lim_{t' \rightarrow t^+} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \sum_{\alpha\beta} J_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}t, \mathbf{x}'t') = \pm i \lim_{t' \rightarrow t} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} tr(J(\mathbf{x})G(\mathbf{x}t, \mathbf{x}'t')) \end{aligned}$$

✓

### Jelea Modelo

Oni havas elektronoj kaj iono de [opposta] ŝarĝo. La elektronoj moviĝas multe pli facile de la iono en ia kubo de lato  $L$  en kiu oni uzas la ecojn de traslacia rotacia nevarianco kaj periodik bordaj kondicioj separinte la ond funkcio kiel sumo de la singlaj.

$$\psi_{\mathbf{k}, \lambda}(\mathbf{x}) = V^{-\frac{1}{2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \eta_\lambda \quad \eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La Hamilton-a estas komponita de kvar partoj: elektrona kinetika termo, interada inter elektronoj, inter elektronoj kaj plusa ŝarĝa *bulk*-o kaj la energio de la plusa kontinua [background]

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} e^2 \sum_{1 \neq j}^N \frac{e^{-\mu|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} - e^2 \sum_{i=1}^N \int d^3x \frac{\mathbf{n}(\mathbf{x}) e^{-\mu|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|} \\ + \frac{1}{2} e^2 \int d^3x d^3x' \frac{\mathbf{n}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}') e^{-\mu|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Oni enmetas la  $\mu$  pro elmeti konverĝaj problemoj kaj fine oni povas malaperigi tiu parametro en la limo  $\mu \rightarrow 0$  kaj  $L \rightarrow \infty$  mode ke  $L \gg \mu$ . Pro la traslacia nevarianteco oni kalkulas sur  $\mathbf{z} = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  kalkulinte la dupla integralo separe kaj de la uniformo distribuo  $n(\mathbf{x}) = N/V$  oni facile kalkulas la lastaj du termoj

$$H_b = \frac{1}{2} e^2 \frac{N^2}{V} \frac{4\pi}{\mu^2} \quad H_{b-el} = -e^2 \frac{N^2}{V} \frac{4\pi}{\mu^2}$$

Por la unua dua termoj oni devas diverse skribi la operatoroj en kvampa kvantiga formo. La kinetika esta simpla

$$\langle \mathbf{x}_1 \lambda_1 | H_k | \mathbf{k}_2 \lambda_2 \rangle = \frac{1}{2mV} \int d^3x e^{-i\mathbf{k}_1 \mathbf{x}_1} (-\hbar^2 \nabla^2) e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{x}_2} \eta_{\lambda_2} = \\ = \frac{\hbar^2 k_2^2}{2mV} \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \int d^3x e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \mathbf{x}} = \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m} \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$$

La operatoro devenas do

$$\hat{H}_k = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda}$$

Por la interada potencialo la kalkulo estas pli longa sed substance egala kaj pportas al la rezulto:

$$\hat{H}_{el} = \frac{e^2}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \delta_{\lambda_1, \lambda_3} \delta_{\lambda_2, \lambda_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4} \frac{4\pi}{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3)^2 + \mu^2} a_{\mathbf{k}_1, \lambda_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2, \lambda_2}^\dagger a_{\mathbf{k}_4, \lambda_4} a_{\mathbf{k}_3, \lambda_3}$$

Kie  $a^\dagger$  kaj  $a$  estas la operatoroj de kreo e detruo ĉar la partiklo de momanto  $\mathbf{k}_1$  kun *spin*  $\lambda_1$  poste la interado havos momanton  $\mathbf{k}_3$  sine ŝanĝo de *spin* ( $\delta_{\lambda_1, \lambda_2}$ ) dume la  $\mathbf{k}_2$ -a havos  $\mathbf{k}_4$ -on. Kun la leĝo de konservo de la momanto oni renomas la variablojn

$$\mathbf{q} + \mathbf{k} := \mathbf{k}_1 \quad \mathbf{k} := \mathbf{k}_3 \quad \mathbf{p} - \mathbf{q} := \mathbf{k}_2 \quad \mathbf{p} := \mathbf{k}_4$$

kaj reskribas

$$\frac{e^2}{2V} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \frac{4\pi}{q^2 + \mu^2} a_{\mathbf{k}+\mathbf{p}, \lambda_1}^\dagger a_{\mathbf{p}-\mathbf{q}, \lambda_2}^\dagger a_{\mathbf{k}_4, \lambda_2} a_{\mathbf{k}_3, \lambda_3}$$

Si oni [izolas] la sumon kiu havas  $\mathbf{q} = 0$  (interŝanĝo de nula momanto) oni povas, uzinte la antikomuta reglo de la Fermi-oj riformuli

$$\frac{e^2}{2V} \frac{4\pi}{\mu^2} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{k}, \lambda_1, \lambda_2} a_{\mathbf{k}, \lambda_1}^\dagger a_{\mathbf{k}, \lambda_1} (a_{\mathbf{p}, \lambda_2}^\dagger a_{\mathbf{p}, \lambda_2} - \delta_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \delta_{\lambda_1 \lambda_2}) = \frac{e^2}{2V} \frac{4\pi}{\mu^2} (\hat{N}^2 - \hat{N})$$

$\hat{N}$  estas la operatoro numero de partikloj kiu aldonas c-numero kiu estas en la unua termo egala kaj oposa al la valoro de la kontribuo al la energia donita de la [background] dume la dua nuligas en la termodinamika limo de kiu oni parolis supre. Oni do volas

kalkuli la mez valoron de la energio de la sistemo kiu ne estas analize kalkulebla. Oni do volas elkti la perturbad variabla laŭ kiu devolvi la proksimado de la kalkulo. Oni do difinas

$$r_0 := \left(\frac{3V}{4\pi N}\right)^{1/3} \quad a_0 := \frac{\hbar^2}{me^2} \quad r_s := \frac{r_0}{a_0}$$

kiuj estas la media longeco per partiklo, la Bohr radio kaj la nedimensia variabla de la devolvo. Oni do reskribas

$$\hat{H} = \frac{e^2}{a_0 r_s^2} \left( \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{1}{2} (r_0 \mathbf{k}_0)^2 a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}, \lambda} + \frac{r_s}{2V} \sum'_{\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{q}} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \frac{4\pi}{(r_0 \mathbf{q})^2} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \lambda_1}^\dagger a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \lambda_1} a_{\mathbf{p}, \lambda_2} a_{\mathbf{k}\lambda_1} \right)$$

Kie  $\sum'$  memorigas ke oni ne sumas plu sur  $q = 0$ . Oni do kalkulos la mez valoro de tiu operatoro sur la baza stato de la sistemo.

...

Kiel bone konita oni povas kalkuli la mez valoron de operatoro per la interad vidado sur devolvo de ne perturbata stato.

$$\frac{\langle \Psi_0^\lambda | \hat{O}_H(t) | \Psi_0^\lambda \rangle}{\langle \Psi_0^\lambda | \Psi_0^\lambda \rangle} = \frac{1}{\langle \Psi_0^0 | U(-\infty, \infty) | \Psi_0^0 \rangle} \langle \Psi_0^0 | \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\lambda t^2} T[\hat{H}(t) \hat{O}_I(t)] | \Psi_0^0 \rangle$$

kie oni difinas

$$|\Psi_H^\lambda\rangle = |\Psi_I^\lambda(0)\rangle = e^{-\lambda|t|} |\Psi_0^0\rangle = \hat{U}_\lambda(0, \infty) |\Psi_0^0\rangle$$

prefere la memstato  $|\Psi_0^\lambda\rangle$  estas la fundamenta  $|\Psi_0^0\rangle$  stato de la perturbata Hamilton-a  $H_\lambda = H_0 + \lambda H_1$  dume  $|\Psi_0^0\rangle$  estas la memstato de la neperturbata. Je la tempo  $t = 0$  la perturbado komencas dume malaperas en la limito  $\pm\infty$ . Kiel supre skribita oni volas kalkuli la Green-an funkcion de kiu oni povas kalkuli ĉion mankanta. En la interad vidado oni priskribas la Green-an funkcion kiel

$$iG_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_n (-i)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \frac{\langle \Psi_0^0 | T[\hat{H}_{1n}(t) \hat{\psi}_\alpha(\vec{x}) \hat{\psi}_\beta^\dagger(\vec{y})] | \Psi_0^0 \rangle}{\langle \Psi_0^0 | U(-\infty, \infty) | \Psi_0^0 \rangle}$$

de kiu si oni volas kalkuli la unajn du termojn oni devas kalkuli

$$iG_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{y}) \simeq \langle \Psi_0^0 | T[\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}, \vec{y})] | \Psi_0^0 \rangle - i \sum_{\nu\nu'\mu\mu'} \int d^4x_1 d^4x_1' U(\vec{x}_1, \vec{x}_1')_{\nu\nu'\mu\mu'} \cdot \frac{\langle \Psi_0^0 | T[\hat{\psi}_\nu^\dagger(\vec{x}_1) \hat{\psi}_\mu^\dagger(\vec{x}_1') \hat{\psi}_{\mu'}(\vec{x}_1') \hat{\psi}_{\nu'}(\vec{x}_1) \hat{\psi}_\alpha(\vec{x}) \hat{\psi}_\beta^\dagger(\vec{y})] | \Psi_0^0 \rangle}{\langle \Psi_0^0 | U(-\infty, \infty) | \Psi_0^0 \rangle}$$

Tiu kalkulo estis pli simple kalkulebla per la Wick teoremo.

### 6.11.2 Mat: Wick-a Teoremo, Dyson-a Ekvacio

Mat

Oni ne volas paroli pri la demonstiron de la teoremo sed oni volas diri ion pri ĝi konsekvencoj. Si oni kalkulas la mez valoron de grandeco oni volonte uzas la Green-a funkcio kiu havas kiel denominatoro  $\langle \Psi_0^0 | U(-\infty, \infty) | \Psi_0^0 \rangle$ . La kalkulo de tiuj matricaj elementoj egalas ĉiuj Feynman diagramojn dekoneksajn kiuj simpliĝas kun la dekoneksaj diagramoj de la numeratoro al ĉiu ordo. La kalkulo de la Green-a funkcio estas la sole kalkulo de la kontrahiĝo  $U - -V$  de la operatoroj de kreo  $\hat{\psi}^- | \Psi_0^0 \rangle$  kaj detruo  $\hat{\psi}^+ | \Psi_0^0 \rangle = 0$ . La kontrahiĝo eksprimeblas en la diferanco inter la  $T$  produkto kiu ordigas la operatorojn poninte ilin en la temp kreskanta ordo kaj la  $N$  produkto kiu ordigas al la dekstro la detru operatorojn por nuligi la termo  $\langle \Psi_0^0 | N[\hat{U}\hat{V}] | \Psi_0^0 \rangle = 0$ .



De la difino de kontrahiĝo  $U - -V = T[UV] - N[UV]$  oni povas vidi ke la sekvantaj operatoroj nuligās

$$\hat{\psi}^+ - -\hat{\psi}^- = (\hat{\psi}^+)^\dagger - -(\hat{\psi}^-)^\dagger = (\hat{\psi}^+)^\dagger - -\hat{\psi}^- = \hat{\psi}^+ - -(\hat{\psi}^-)^\dagger = 0$$

ĉar la rezulto de la  $T$  kaj  $N$  produkto egalas. Multaj kongtrahiĝoj nuligas ĉar la rezulta Green-a funkcio estas la sumo de ĉiaj eblaj kontrahiĝoj. La kontrahiĝo de du operatoroj valoras ne perturbitan Green-an funkcion

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^+(x) - -(\hat{\psi}^+)^\dagger(y) & \stackrel{t_x > t_y}{=} iG^0(x, y) & \stackrel{t_y > t_x}{=} 0 \\ \hat{\psi}^-(x) - -(\hat{\psi}^-)^\dagger(y) & \stackrel{t_x > t_y}{=} 0 & \stackrel{t_y > t_x}{=} iG^0(x, y) \end{aligned}$$

Oni havas  $n!$  eblaj koneksaj diagramoj kiuj valoras egale ĉar ne estas grava la etiketo kiu oni donas al la variabloj ekzakte por la ekstremaj punktoj kiuj ne povas ŝanĝi. La lineo de interado  $U(\vec{x}, \vec{y})_{\lambda\lambda'\mu\mu'} = V(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\lambda\lambda'\mu\mu'} \delta(t - t')$  estas prezentita per onda lineo kaj por ĉiu punkto oni havas enirantan momenton  $\vec{k}$  kaj eliranta  $-\vec{k}'$  dume la interado havos  $\vec{k}'' = \vec{k} - \vec{k}'$ . De la alia parto oni havos  $\vec{q}'' = \vec{k}'' = \vec{q} - \vec{q}'$  en la eniro de la interad lineo. Por kompreni la kalkulo de la Green-a funkcio sekvinte la Wick-a teoremo oni montras la rezulto de funkcio ĝis la unua ordo

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}) & = i \int d^4x_1 \int d^4x'_1 \left( (-1) G_{\alpha\lambda}^0(\vec{x}, \vec{x}_1) U_{\lambda\lambda'\mu\mu'}(\vec{x}_1, \vec{x}'_1) G_{\lambda'\beta}^0(\vec{x}_1, \vec{y}) G_{\mu'\mu}^0 + \right. \\ & \left. + G_{\alpha\lambda}^0(\vec{x}, \vec{x}_1) U_{\lambda\lambda'\mu\mu'}(\vec{x}_1, \vec{x}'_1) G_{\lambda'\mu}^0(\vec{x}_1, \vec{x}'_1) G_{\mu'\beta}^0(\vec{x}'_1, \vec{y}) \right) \end{aligned}$$

En la momenta prezento la Green-a funkcio transformiĝas en

$$G_{\alpha\beta}^0(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} G^0(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} \left( \frac{\theta(|\mathbf{k}| - k_F)}{\omega - \omega_{\mathbf{k}} + i\eta} + \frac{\theta(k_F - |\mathbf{k}|)}{\omega - \omega_{\mathbf{k}} - i\eta} \right)$$

kaj ĉiu interado korespondas al la faktoro  $U_{\lambda\lambda'\mu\mu'}(\vec{q}) = \mathcal{V}_{\lambda\lambda'\mu\mu'}(\mathbf{q})$  si  $U$  dependas sole de la diferenco inter la variabloj  $U(\vec{x}, \vec{y}) = U(\vec{x} - \vec{y})$ . Kiel oni povas vidi en la lasta ekvacio, se la Hamilton-a ne dependas de la *spin* variablo, aŭ oni povas saturiĝi ĝin oni sribos la ekzakta Green-a funkcio per

$$G_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{y}) = G_{\alpha\beta}^0 + \int d^4x_1 \int d^4x'_1 G_{\alpha\lambda}^0(\vec{x}, \vec{x}_1) \Sigma_{\lambda\mu}(\vec{x}_1, \vec{x}'_1) G_{\mu\beta}^0(\vec{x}'_1, \vec{y})$$

ke difinas la mem energion  $\Sigma$  kaj separas la ekstremaj punktoj de la Green-a funkcioj de la aliaj kun kiuj oni ne devas gardi al la ŝanĝo inter la punktoj sed sole al la formo de la digramoj kaj la rotacio de la operatoroj kiuj ŝanĝas la signo al plusa termo. De la difino supren donita sole la propraj, prefere la termoj kiuj oni ne povas separi [tagliando] sola partikla lineo, estas gravaj. Diagramoj de tiu tipo nomiĝas **Mem Enerĝio Propra**  $\Sigma^*$  kaj utilas por skribi la mem energion kiel sumo de diversaj ordoj de la mem propra energio. En la prezento de la momentoj

$$G(\vec{k}) = G^0(\vec{k}) + G^0(\vec{k}) \Sigma(\vec{k}) G(\vec{k})$$

kiu permetas skribi la Green-a funkcio kiel

$$G(\vec{k}) = \frac{1}{(G^0(\vec{k}))^{-1} - \Sigma^*(\vec{k})}$$

kiu estas la **Dyson-a Ekvacio** kie oni scias ke la inverso de la Green-a estas

$$(G^0(\vec{k}))^{-1} = \omega - \omega_{\mathbf{k}}^0$$

en la *spin* ne dependa kazo. Oni povas simile difini la **Polarizaĝo Propra**  $\Pi^*$  kiu estas la ĉiuj diagramoj kiuj ne separigas tranĉinte interad lineon kaj finas en du

interad lineoj. La kompleta interado estas do la sumo de la diversaj ordoj de la propra polarizaĝo  $\Pi^* = \Pi^{*0} + \Pi^{*1} + \dots$ . Dum la eksakta interado skribiĝas per la sekvanta Dyson-a ekvacio

$$\mathcal{V}(\vec{q}) = \frac{U_0(\vec{q})}{1 - \Pi^*(\vec{q})U_0(\vec{q})}$$

✓

Nun estas grava introduki la |Lehman-a Prezento|n kiu eblas skribi la Green-a funkcio en pli simpla formo ĉar oni substituas la derivaĝojn kun la reciprokoj de la tempo kaj la distanco per la Fourier-a transformiĝo.

$$\hat{P} := \sum_{\alpha} \int d^3 \hat{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(-i\hbar\nabla)\hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\mathbf{k}c_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger}c_{\mathbf{k}\lambda} - i\partial_t \hat{=} \omega$$

$$\hbar\omega_n := \mathcal{E}_n - \mathcal{E} \quad \Delta t := t - t'$$

Oni do transformas la Green-a funkcio en Heisenberg-a vidado

$$iG_{\alpha\beta}(\mathbf{x}t, \mathbf{x}'t') = \sum_n \left( \theta(t-t')e^{-i\omega_n\Delta t}e^{i\mathbf{P}_n(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\alpha}(0) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(0) | \Psi_0 \rangle + \right. \\ \left. -\theta(t'-t)e^{i\omega_n\Delta t}e^{-i\mathbf{P}_n(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(0) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\psi}_{\alpha}(0) | \Psi_0 \rangle \right)$$

en la formo transformita

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = V \sum_n \left( \frac{\langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\alpha}(0) | n\mathbf{k} \rangle \langle n\mathbf{k} | \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(0) | \Psi_0 \rangle}{\omega - \omega_n + i\eta} + \frac{\langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(0) | n - \mathbf{k} \rangle \langle n - \mathbf{k} | \hat{\psi}_{\alpha}(0) | \Psi_0 \rangle}{\omega + \omega_n - i\eta} \right)$$

Tiu prezento estas tre grava ĉar montras la ecoj de la sistemo. Oni difinas

$$\omega_n = \mathcal{E}_n(N+1) - \mathcal{E}(N+1) + \mathcal{E}(N+1) - \mathcal{E}(N) =: \mathcal{E}_n^{ek}(N+1) - \mu$$

kiu pli klare montras la energio de ekscito de la sistemo de  $N+1$  partikloj al la nivelo  $n \mathcal{E}_n^{ek}(N+1)$  kaj la ĥemia potencialo  $\mu$  kiu estas la energio aldonita al la sistemo si oni enmetas partiklo de tiu speco. Oni konsideras la ĥemia potencialo preskaŭ egala tamen se  $\mu(N+1) = \mu(N) + O(N^{-1})$  kaj oni scias ke je la nula temperaturo pro la Pauli principo la ĥemia potencialo egalas la Fermi energio.  $G$  estas a  $2 \times 2$  matricoj kaj oni povas esprimi ĝin en termoj de la Pauli matricoj  $\sigma$ . En tiu formo oni povas priskribi la unuan termon de la Green-a funkcio kiel la  $N+1$  partiklo sur la  $\mathcal{E}_F$  nivelo de  $N$  partikloj kiu havas energio de ekscito  $\mathcal{E}_k^{ek} - \mathcal{E}_F = (k^2 - k_F^2)/2m$ . La matricoj elementoj havas do formo

$$\langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\alpha}(0) | n\mathbf{k} \rangle \langle n\mathbf{k} | \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(0) | \Psi_0 \rangle \rightarrow \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\theta} k - k_F V$$

La dua termo prezentas anstataŭe sistemon de  $N-1$  partikloj, prefere ke truo pasas sub la  $\mathcal{E}_F$  nivelon kiu donas diferenco de energia nivelo de  $(k_F^2 - k^2)/2m$  kaj matricoj elementoj  $\theta(k_F - k)$ . En tiu formo la Green-a funkcio estas meromorfa funkcio kun la diferenca energio inter la ĥemia potencialo e la energio de la ekscito kiel poloj.

## 6.12 Ringa Proksimado

La kalkulo de interaĝanta sistemo estas ĉiam difikila sed oni povas fari proksimadon kiu bone plivaloras la sperimentalan daton. Oni faros pesajn proksimadojn kiuj estas: *I*) sistema ond-funkcio faktorigebla en sigla partiklo ond funkcio (Hartree-Fock proksimado) *II*) Potencialo isotropa, *spina* kaj tempa nedependa kaj depenanta de la

sola diferenco de koordinatoj  $\mathcal{V}(\vec{x}, \vec{x}') = \mathcal{V}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t')$  III) La potencialo estas malgranda ĉar grandas kiel la kuplaĝo konstanto  $\epsilon$ .

De tiu oni povas skribi la mez valoron de la potencialo kiel

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{V} \rangle &= \frac{1}{2} \int d^3x d^3x' V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \langle \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}') \hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}') \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x d^3x' \mathcal{V}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') (\langle \hat{n}(\mathbf{x}) \hat{n}(\mathbf{x}') \rangle - \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \langle \hat{n}(\mathbf{x}) \rangle)\end{aligned}$$

kiu al ni sugesti de difini funkcion

$$\tilde{n}(\mathbf{x}) := \hat{n}(\mathbf{x}) - \langle \hat{n}(\mathbf{x}) \rangle$$

$$iD(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{\langle \Psi_0^\lambda | T[\tilde{n}(\vec{x}) \tilde{n}(\vec{x}')] | \Psi_0^\lambda \rangle}{\langle \Psi_0^\lambda | \Psi_0^\lambda \rangle}$$

kiu estas la polarizaĝa operatoro kiu estas utila por kalkuli

$$\langle \hat{\mathcal{V}} \rangle = \langle \Psi_0^0 | \hat{\mathcal{V}} | \Psi_0^0 \rangle + \frac{1}{2} \int d^3x d^3x' \mathcal{V}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') [iD(\vec{x}, \vec{x}') - iD^0(\vec{x}, \vec{x}')] ]$$

La energio de la sistemo estas priskribbla per la perturbata proksimado. Oni konsideras la Hamilton-a kiel  $H := H_0 + \lambda \mathcal{V}$  de kiu la variado de la energio estas

$$\langle \Psi_0^\lambda | \Psi_0^\lambda \rangle \stackrel{!}{=} 1$$

$$\partial_\lambda \mathcal{E} = \mathcal{E} \partial_\lambda (\langle \Psi_0^\lambda | \Psi_0^\lambda \rangle) + \langle \Psi_0^\lambda | \partial_\lambda \hat{\mathcal{V}} | \Psi_0^\lambda \rangle = \langle \Psi_0^\lambda | \partial_\lambda \hat{\mathcal{V}} | \Psi_0^\lambda \rangle$$

kiu oni donas la formulo

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \langle \Psi_0^\lambda | \lambda \hat{\mathcal{V}} | \Psi_0^\lambda \rangle$$

La dekstra parto de la ekvacio oni nomiĝos **Energio Korrelada** kiu esprimos en Fourier-a prezento

$$\mathcal{E}_{kor} = \frac{1}{2} \frac{V}{(2\pi)^4} \int \frac{d\lambda}{\lambda} \int d^4q \lambda \mathcal{V}(\mathbf{q}) [iD^\lambda(\vec{q}) - iD^0(\vec{q})]$$

Oni povas vidi ke la polarizaĝa propagatoro al la nula diagramas en du partiklaj lineoj klusas inter ilin.

$$D_{\alpha\beta}^0(\vec{x}, \vec{x}') = -iG_{\alpha\beta}^0(\vec{x}, \vec{x}') G_{\alpha\beta}^0(\vec{x}', \vec{x}) \quad D_{\alpha\beta}^0(\vec{q}) = -\frac{i}{(4\pi)^4} \int d^4q G_{\alpha\beta}^0(\vec{k}) G_{\beta\alpha}^0(\vec{q} + \vec{k})$$

kiu estas egala al la polarizaĝo  $\Pi^*$ .

De tiu oni povas kalkuli la mez valoro de la **Coulomb**-a potencialo en la sekvantaj pasoj. Oni povas vidi ke al la unua ordo la ĉiuj interad lineoj kiuj ne portas momenton nulas ĉar  $\mathcal{V}(\vec{q} = 0) = 0$  kaj ne portas momenton la lineo kiu konktigas la Fermi-a ringoj  $G^0(\vec{x}, \vec{x}^+)$ . La aliaj termoj estas la ringa termo al la dua ordo

$$\mathcal{E}_2^r = \frac{1}{2} \frac{V}{(2\pi)^4} \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \int d^4q [\lambda U_0(\vec{q}) \Pi^0(\vec{q})]$$

kaj la unua ordo propraj polarizaĝoj kiuj oni povas vidi kiu estas finitaj. La ringa energio estas en la *ringa proksimado*  $\Pi^* = \Pi^0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^n = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x} \text{ per } x < 1$$

$$\mathcal{E}_r = \sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{E}_n^r = \frac{1}{2} \frac{V}{(2\pi)^4} \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \int d^4q \frac{(\lambda \mathcal{V}_0(\vec{q}) \Pi^0(\vec{q}))^2}{1 - \lambda \mathcal{V}_0(\vec{q}) \Pi^0(\vec{q})}$$

kiu kompligi la skribon sed forpreni la diverĝencon al  $\vec{q} = 0$ . Oni devus nun kalkuli la polarizajon kiel konvoluo de du Green-aj funkcioj en Fourier-a prezento

$$\Pi^0(\vec{q}) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{\theta(|\mathbf{q} + \mathbf{k}| - k_F) \theta(k_F - k)}{q_0 + \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} + i\eta} - \frac{\theta(k_F - |\mathbf{q} + \mathbf{k}|) \theta(k - k_F)}{q_0 + \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} - i\eta} d^3k$$

kiu estas longa kaj laborema kalkulo. Oni volas nur diri ke tiu kontribuo donas kontribuo al la energio

$$\frac{\mathcal{E}_{korrr}}{N} = \frac{e^2}{2a_0} \left( \frac{2}{\pi^2} (1 - \ln 2) \ln r_s - 0.094 + O(r_s \ln r_s) \right) \quad r_s \rightarrow 0$$

Si oni havus farita la ĉiujn kalkulojn oni havos obtenita per la ĵilea modelo

$$\frac{\mathcal{E}}{N} \stackrel{r_s \rightarrow 0}{=} \frac{e^2}{2a_0} \left( \frac{2.21}{r_s^2} - \frac{0.916}{r_s} + \frac{2}{\pi^2} (1 - \ln 2) \ln r_s - 0.094 + O(r_s \ln r_s) \right)$$

# Capitolo 7

## Statistika Mekaniko

### 7.1 Distribua Funkcio

La statistika mekaniko priskribas la termodinamikajn variablojn,  $(\mathcal{T}, \mathcal{E}, \mu, \mathcal{P}, \xi)$  per la uzo de la dinamika variabloj  $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ . La statistika mekaniko devas priskribi la relacio inter la inversigebleco mikroskopa kaj la ne inversigebleco makroskopa. Komence, oni volas konsideri ia priskribo de io sistemo de  $N$  partikloj en volumeno  $V$  en alproksomiĝo klasika sine konsideri surfaca korektado. Oni volas malkovri la distribua funkcio kiu priskribas la probabla dinamika valoro por ia partiklo priskribita en la  $|\mu\text{-spaco}|$ , la spaco de la koordinatoj  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ <sup>1</sup>. Ĉi tiu funkcio

$$\rho(p, q, t) d^{3N} p d^{3N} q$$

estu

- Normaligita
- Ĉiu relacio dependas sole de la energio, impulso kaj pozicio.
- $(\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}}) \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$
- $N \rightarrow \infty \quad V \rightarrow \infty \quad N/V = \text{cost}$  |**Termodinamika Limito**|
- La sistemo estas dinamike priskribita per Hamilton-aj ekvacioj

Oni do konsideri la loko geometrika tie ene  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E$ , ekvapotenco surfaco, en kiu oni havas senfinaj valoroj de la du triobloj  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ . Sekvinte la teoremo de Liuville

$$\partial_t \rho + \{\rho, H(\mathbf{p}, \mathbf{q})\} = 0$$

ke kondukas kiel fluo nekunpremebla.

**Postulato 7.1.1** *Ekvala Apriore Probablo* Kiam ia sistemo makroskopa estas termodinamike en ekvilibrio, sia stato povas esti kun ekvala probablo ĉio inter kioj plenumas la kondicioj makroskopika de la sistemo.

De ĉia variablo oni volas la mez valoro, la kvara mez devio kaj ĉia sia kunrilata funkcio ĉar ĉiu valoro, en la termodinamika limito, estas praktike la mezvaloro. La |**Entropio**| estas definitiva kiel

$$S = k \log(\Gamma(E))$$

kaj agas simile al la termodinamika entropio ĉar estas estensa (la entropio de du sistemoj estas la sumo de la entropioj kaj  $S \rightarrow N + O(\log(N))$ ) kaj sekvas la termodinamik

<sup>1</sup>La spaco de  $N$  partikloj de koordinatoj  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  estas anstataŭe la  $|\gamma\text{-spaco}|$  kaj prezentas la |**Ensemble**| (laŭ Gibbs) se  $N \rightarrow \infty \quad V \rightarrow \infty \quad N/V = \text{cost}$

dua leĝo. En la termodinamika limo sole unu konfigurado havas numero de okupado multe pli okupita ol aliaj do la entropio estas kalkulebla per  $\Gamma(\mathcal{E})$ , volumeno okupita inter du energiaj valoroj  $\mathcal{E} \leq H(\underline{p}, \underline{q}) \leq \mathcal{E} + \Delta$ , per  $\Sigma(\mathcal{E})$ , volumeno okupita inter surfaca nivelo  $H \leq H(\underline{p}, \underline{q})$  aŭ la denseco de la statoj  $w(\mathcal{E}) = \partial_{\mathcal{E}} \Sigma(\mathcal{E})$ . Oni ne konsideras la energio de interacio inter la sistemoj, (ena proksimaĝo) akirante  $H(\underline{p}, \underline{q}) = H_1(\underline{p}_1, \underline{q}_1) + H_2(\underline{p}_2, \underline{q}_2)$ . La **|Probablo|** estas definita kiel la rejŝo inter la interesa kaza kontraŭ ĉia kaza. Por la  $\gamma$ -spaco

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}_i) = \frac{\Gamma(\mathcal{E}_i)}{\sum_i \Gamma(\mathcal{E}_i)} au = \frac{\int_{\mathcal{E} < \mathcal{E}_i < \mathcal{E} + \Delta} e^{\beta H_i(\bar{p}_i, \bar{q}_i)} d\bar{p}d\bar{q}}{\int e^{\beta H(\bar{p}, \bar{q})} d\bar{p}d\bar{q}}.$$

### 7.1.1 Funkcio Partaga

Th:

Lagrange-a Multiplikatoro

Estu  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  difereciebla en  $\omega \in Y \subset \mathbb{R}^n$  aperto.

Estu  $M \in Y$  varieco de klasa  $C^l$  de dimensio  $m \leq n$ .

Estu  $\underline{p} \in M \subset \Omega$  kaj  $\underline{g}: V \rightarrow \mathbb{R}^\nu$  kun ( $\nu = n - m$ ) ligilo pro  $M$  ĉirkaŭe  $\underline{p}$ .  $\underline{p}$  estas staciona punkto sse ekzistas  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_\nu$  multiplikatoroj kiuj esprimas  $\underline{f}'(\underline{p})$  kiel lineara kompono de  $\underline{g}'(\underline{p})$  aŭ

$$\underline{f}'(\underline{p}) = \sum_{j=1}^{\nu} \Lambda_j \underline{g}'_j(\underline{p})$$

□

Si oni partas la spaco en  $n_i$  en la  $i$  stato, oni havas  $n$  partikloj en  $N$  mikrosopaj statoj  $Q(n_i)$ . Oni volas serĉi la stato makroskopika ke koresponda al pli granda numero de statoj mikroskopikaj per  $Q(n_1, \dots, n_n) = n! / (n_1! \dots n_n!)$  prefere maskimigi la funkcio  $Q_N$  kun la vinkloj de konservo:  $\sum_i n_i = n$   $\sum_i \mathcal{E}_i n_i = \mathcal{E}$ .  $\log Q_N = \log \left( \frac{n!}{n_1! \dots n_n!} \right) = \log n! - \sum_i \log n_i!$ . Laŭ la Lagrange-a multiplikatoroj, oni devas trovi la maksimumo de la funkcio  $(\log n! - \sum_i n_i \log n_i - n_i) + \alpha(\sum_i n_i - n) + \beta(\sum_i n_i \mathcal{E}_i - \mathcal{E})$  aŭ kalkuli:

$$\partial_{n_j} \left( (\log n! - \sum_i n_i \log n_i - n_i) + \alpha(\sum_i n_i - n) + \beta(\sum_i n_i \mathcal{E}_i - \mathcal{E}) \right) = 0$$

$$0 = -\log n_j - 1/n_j \cdot n_j + 1 + \alpha + \beta \mathcal{E}_j \text{ do}$$

$$n_j = e^{\alpha} e^{\beta \mathcal{E}_j}$$

La energio de ideala gaso estas  $3/2Nk\mathcal{T}$  do

$$\frac{3}{2}Nk\mathcal{T} = \frac{N \int_{-\infty}^{\infty} 1/2 \cdot m\mathbf{v}^2 e^{\beta 1/2 \cdot m\mathbf{v}^2} d^3v}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta 1/2 \cdot m\mathbf{v}^2} d^3v}$$

$$3k\mathcal{T} = 3(-1/\beta) \cdot \sqrt[3]{(-2\pi/\beta m)} / \sqrt[3]{-2\pi/\beta m} \text{ do } \beta = -1/k\mathcal{T}.$$

La **|Funkcio Partaga|** nedimensia estas

$$Q_N(V, \mathcal{T}) = \frac{1}{N! h^{3N}} \int e^{\beta H(\bar{p}, \bar{q})} d^3q d^3p = e^{-\beta \mathcal{A}(V, \mathcal{T})} = \int_0^{\infty} e^{-\beta(\mathcal{T}\mathcal{S}(\mathcal{E}) - \mathcal{E})} d\mathcal{E} \quad (7.1)$$

kaj egalas  $esp(-\mathcal{A}\beta)$  kaj  $\mathcal{A} := \mathcal{U} - \mathcal{T}\mathcal{S}$  estas la energio Helmholtz-a kaj por la du termodinamik leĝoj  $L \leq \Delta \mathcal{A}$ . ĉar:

$$\partial_{\beta} \frac{1}{N! h^{3N}} \int e^{\beta(H(\bar{p}, \bar{q}) - \mathcal{A})} = \partial_{\beta} 1 = 0$$

sekvinte de  $-\langle H \rangle + \mathcal{A} + \beta \partial_{\beta} \mathcal{A} = 0$ .

Se la  $\mathcal{U}$  Hamilton-a ne dipenas de  $\underline{p}$  oni povas faktoriĝi la funkcio kaj obtieni

$$\frac{1}{h^{3N} N!} \int e^{\sum_i \frac{\underline{p}_i^2}{2m_i}} d^{3N}p = \left( \sqrt{\frac{2\pi m k\mathcal{T}}{h^2}} \right)^{3N} = \frac{1}{\Lambda^{3N}}$$

$$\log x! \simeq x \log x - x$$

La presio estas nomata **Ond Longeco Terma**.

$$Q_N = \frac{1}{N! \Lambda^{3N}} \left( \frac{S(e^{-\beta mg q_{z2}} - e^{-\beta mg q_{z1}})}{\beta mg} \right)^{3N}$$

De kiu sekvas:  $\mathcal{A} = kT \log(Q_N)$   $P = -\partial_V \mathcal{A} = -1/S$   $\partial_{q_z} \mathcal{A}$

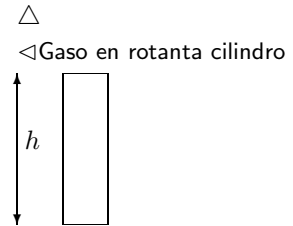
$$P_1 = \frac{kT N}{S} \beta mg \frac{e^{\beta mg q_{z1}}}{e^{\beta mg (q_{z2} - q_{z1})}}$$

$$\Delta P = P_2 - P_1 = Nmg/S$$

$$V(r) = \alpha r^2$$

$$Q_N(h, R, T) = \frac{1}{\Lambda^{3N} N!} \left( \int e^{-\beta V(x,y,z)} dx dy dz \right)^N = \frac{1}{\Lambda^{3N} N!} \left( 2\pi \int r e^{-\beta \alpha r^2} dr \right)^N =$$

$$= \frac{1}{\Lambda^{3N} N!} \left( \int_0^R \frac{2\pi}{2\beta\alpha} \partial_r e^{-\alpha\beta r^2} \right)^N = \frac{1}{\Lambda^{3N} N!} \left( \pi \frac{1 - e^{-\alpha\beta R^2}}{\beta\alpha} \right)$$



La presio estas do

$$\mathcal{P}_{//} = -\partial_V \mathcal{A} = k_B T \partial_R \log Q_N = \frac{k_B T N}{2\pi R h} \partial_R \log(1 - e^{-\beta\alpha R^2}) = \frac{k_B T N}{2\pi R h} \frac{2R\beta\alpha e^{\beta\alpha R^2}}{1 - e^{-\beta\alpha R^2}}$$

$$\text{kaj } \langle \mathcal{P}_\perp \rangle = k_B T / \pi R^2 \partial_h \log(Q_N) = k_B T N / \pi R^2 h.$$

△

Si oni operis sur la potencialo  $A$  la funkcio partaga estas ĝenerilo de mez valoroj tial la valoro de la esponento “falas inter” la integralo realigante ĝia mez valoro.

$$\langle f \rangle = \frac{\int f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) e^{f\alpha\beta} d\mathbf{p} d\mathbf{q}}{\int e^{f\alpha\beta} d\mathbf{p} d\mathbf{q}} = -k_B T \partial_{\alpha\beta} \log(Q_N). \tag{7.2}$$

De tio oni dekovri ke la fluaĝo de la ena energio kalas tiel  $\sqrt{N}$ .

$$\frac{\sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}}{\langle H \rangle} = \frac{\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \mathcal{A}}}{\partial_\beta \mathcal{A}} = \frac{\sqrt{\frac{\partial}{\partial \beta} \langle H \rangle}}{\partial_\beta \mathcal{A}} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

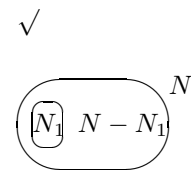
$$\text{tial } \langle (H - \langle H \rangle) \rangle = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 \quad \langle H \rangle \propto N \quad \partial_T \langle H \rangle \propto N.$$

### 7.1.2 Mat: Kombinatoriko

Mat

- $n$  elementoj prenitaj  $k$  je  $k$ :  $w = n^k$
- $n$  elementoj prenitaj  $n$  je  $n$  sine ripeto:  $w = n!$
- $n$  elementoj prenitaj  $k$  je  $k$  kun interŝanĝo:  $w = \frac{n!}{(n-k)!}$
- $n$  elementoj prenitaj  $k$  je  $k$  sine interŝanĝo:  $w = \frac{n!}{(n-k)! k!}$
- $w_n = \prod_i^n \frac{N_i!}{N_i!}$  ĉiuj modoj de poni  $N$  partikloj en  $n$  partumigoj

Si oni volas priskribi la sistemo kun la variabloj  $(\langle N \rangle, p, q, T)$  ĉar de fakte, fizike, oni povas koni nur la mez valoro de la partiklaj por la ekstera kondocoj kaj ne la eksakta numero de ilin. Oni povas konsideri du sistemoj, iu granda kiu termostatas la malgranda tiu ke  $N_1 \ll N_2$  infinitezima.  $N = N_1 - N_2$ , do la korekta konto de Boltzmann  $1/N!$  estas



$$\frac{1}{N!} = \sum_{N_1}^N \frac{1}{N!(N - N_1)!}$$

aŭ la kombino de ĉiu modoj de poni  $N_1$ -n partiklajn en  $V_1$  kaj la  $N_2$ -n en  $V_2$  kun  $V_1$  kiu plenigas ĉion spacon.

$$z = e^{\beta\mu} \quad Z(V, \mathcal{T}, \mu) = \sum_N z^N Q_N(V, \mathcal{T}) \stackrel{\text{ofte}}{=} \sum_N \frac{z^N V^N}{\Lambda^{3N} N!} = e^{\frac{zV}{\Lambda^3}}$$

$$\langle N \rangle = z \partial_z \log Z = \frac{zV}{\Lambda^3} = \log Z = \frac{PV}{k\mathcal{T}}$$

do  $\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = PV/k\mathcal{T}$ .

En la vido grankanona oni povas defini la **|Helmholtz-a Libera Energio|** kiel

$$dA = -\mathcal{P}dV - Sd\mathcal{T} + \mu dN \quad (7.3)$$

Kiu estas la maksimuma ebla laboro agita de la sistemo en transformzĵo. Pluen, en sistemo termodinamika izolita la Helmholtz-a energio estas minimuma.

La **|Interna Energio|**

$$dU = -\mathcal{P}dV + \mathcal{T}dS + \mu dN \quad (7.4)$$

La **|Entalpio|**

$$dH = \mathcal{T}dS + Vd\mathcal{P} \quad (7.5)$$

Finfine la **|Gibbs-a Interna Energio|**

$$dG = -Vd\mathcal{P} - Sd\mathcal{T} + \mu dN \quad (7.6)$$

akirante:

$$\mu := \left( \partial_N A \right)_{V, \mathcal{T}} = \left( \partial_N G \right)_{\mathcal{P}, \mathcal{T}}$$

Gasu duatoma en unudimensio La potencialo kimika estas Lagrange-a Multiplikatoro ĉar estas nevariebla kvanteco.

$$H_{1,2}(\vec{p}_{1,2}, \vec{q}_{1,2}) = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} k_0 |\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1|^2$$

se  $\mathbf{p}_{cm} = \frac{1}{2}\mathbf{p}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{p}_2$  kaj  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ,  $p_{ri} = |p_2 - p_1|$

$$Q_N(V, T) = \frac{1}{N! 2^N h^{6N}} \prod_i \int e^{-\frac{1}{4m} \frac{\beta p_i^2}{4m}} e^{-\frac{\beta k r_{ri}^2}{2}} e^{-\frac{\beta}{m} p_{ri}^2} d^3 p_{cmi} d^3 r_{cmi} d^3 p_{rii} d^3 r_{rii}$$

$$Q_N = \frac{L^N}{2^N \Lambda_{cm}^N \Lambda_{ri}^N \Lambda_k^N}$$

Kie

$$\frac{1}{\Lambda_{cm}} = \sqrt{\frac{8\pi k_B \mathcal{T} m}{h_p^2}} \quad \frac{1}{\Lambda_{ri}} = \sqrt{\frac{2\pi k_B \mathcal{T} m}{h_p^2}} \quad \frac{1}{\Lambda_k} = \sqrt{\frac{2\pi k_B \mathcal{T}}{k h_p^2}} \quad \frac{1}{\Lambda^1} \propto (k_B \mathcal{T})^{1/2}$$

Pro kalkuli la mez energio:

$$-\partial_\beta \log \frac{1}{\Lambda} = (k_B \mathcal{T})^2 \partial_{k_B \mathcal{T}} \left( \log \left( (k_B \mathcal{T})^{1/2} + c \right) \right) = \frac{1}{2} (k_B \mathcal{T})^2 \frac{1}{k_B \mathcal{T}} = \frac{1}{2} k_B \mathcal{T}$$

Horaŭ oni povas kalkuli  $\langle H \rangle = -\partial_\beta \log(Q_N) = \frac{1}{2} N k_B \mathcal{T} + \frac{1}{2} N k_B \mathcal{T} + \frac{1}{2} N k_B \mathcal{T} = \frac{3}{2} N k_B \mathcal{T}$ . Oni povas vidi la **|Th: de Egala Partumigo de la Energio|**, ĉiu libera grado donas al la mez valoro de la interna energio kontribuon  $1/2 N k_B \mathcal{T}$ . Do en tri dimensioj

$$Q_N = \frac{L^N}{2^N \Lambda_{cm}^{3N} \Lambda_{ri}^{3N} \Lambda_k^{3N}}$$



$$\langle \mathcal{U} \rangle = Nk_B \mathcal{T}(3/2 + 3/2 + 3/2) = nk_B \mathcal{T} \cdot 9/2.$$

La se la potencialo estas  $|x_1 - x_2|^n$  kun  $n \neq 2$  oni ne povas separi la termojn sed devas kalkuli la integralo per

$$Q_N(L, \mathcal{T}) = \frac{L^N}{N! 2^N \Lambda_{cm}^N \Lambda_r^N} \left( \int dx_{ri} e^{-\frac{\beta \alpha x_{ri}^4}{2}} \right)^N$$

solvicebla per la gamma Euler-a poste havi uzita la polaraj koordinatoj.

### 7.1.3 Mat: Euler-a Gamma kaj Beta

Mat

[Euler-a  $\Gamma$ ]

$$\Gamma(w) := \int_0^\infty t^{w-1} e^{-t} dt \quad \Gamma(m+1) = m! \quad \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2m)!}{2^{2m} m!}$$

[Euler-a  $B$ ]

$$\begin{aligned} B(p, q) &:= \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = 2 \int_0^{2\pi} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta = \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} du = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Estas ofte utila tiu kalkulo:

$$\int_0^\infty e^{\beta \alpha x^n} dx = \int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{n \sqrt[n]{\alpha \beta}} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(1/n)}{n \sqrt[n]{\alpha \beta}}$$

$$x = \sqrt[n]{\frac{t}{\alpha \beta}} \quad dx = \frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{n \sqrt[n]{\alpha \beta}}$$

Derivante la konstantoj, kiel la Euler-a  $\Gamma$ , malaperas do ne estas grava koni la eksakta valoro de tiu integralo sed la formo de  $\alpha$  kaj  $\beta$  ĉar ĝenere varias kun la variabloj ( $\mathcal{T}, q, \dots$ ). Se  $n = 4$

$$Q_N(L, \mathcal{T}) = \frac{L^N \Gamma^N(1/4)}{N! 2^N \Lambda_{cm}^N \Lambda_{ri}^N (4 \sqrt[4]{\alpha \beta / 2})^N}$$

do  $\langle \mathcal{U} \rangle = k_B \mathcal{T} N(3 + 3n/2)$

$\triangle$

## 7.2 Kvantuma Statistiko

Oni konsideras *ensemble* de  $N$  partikloj priskribitaj per la ond funkcio

$$\psi_{\underline{n}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = |n_1, n_2, \dots, n_N\rangle$$

La problemo de la aŭtovaloroj estas faktorigebla en ĉiu partiklo kaj dimensiono. Ia sistemo de  $N$  partikloj identikaj estas nevaiaanta sub la interŝanĝo de la koordinatoj de iu duplo de partikloj. Ia operatoro de interŝanĝo  $P$  solvas la Shrödingera ekvacio  $H|P\psi\rangle = E_n|P\psi\rangle$  kaj  $P^{-1}HP = H$ .  $P^2\psi = \psi$  do  $P\psi = \pm\psi$ . Oni havas du sistemoj ke pro la leĝo de superselkio ne povas miksiĝis kaj oni nomas **[Fermionoj]** se  $P\psi = -\psi$  aŭ **[Bosonoj]** se  $P\psi = \psi$ . Obtenas do ke ia funkcio  $\psi_{n_1, n_2}(x_1, x_2)$  estas esprimebla per iu funkcio simetrika kaj iu kontraŝimetrika

$$\langle x_1, x_2 | n_1, n_2 \rangle = \frac{\langle x_1 | n_1 \rangle \langle x_2 | n_2 \rangle \pm \langle x_2 | n_1 \rangle \langle x_1 | n_2 \rangle}{\sqrt{2}}$$

Oni povas vidi ke la fermionoj ne povas ĉeesti en la sama stato ĉar nuliĝas la ond funkcio **[Pauli-a Eskluda Principo]** dume la bosonoj povas ĉeesti en la sama stato.

Oni partas la energia spektro de  $n - i$  partikloj en  $g_i$  ĉeloj kiu havas energio  $\mathcal{E}_i$ . Por la fermionoj oni povas konti kvantaj statoj havas  $g_i$  ĉelojn kuntenantajn  $n_i$  partikloj sine interŝanĝo. Kiel supren

$$\partial_{n_j} \left( \log \prod_i^N \binom{g_i}{n_i} - \alpha \left( \sum_i n_i \right) - \beta \left( \sum_i \mathcal{E}_i n_i - \mathcal{E} \right) \right) = 0$$

$$n_i = 0, 1$$

kun similaj kalkuloj

$$\bar{n}_j = g_j \frac{e^{-\alpha - \beta \mathcal{E}_j}}{1 + e^{-\alpha - \beta \mathcal{E}_j}} = \frac{1}{1 + e^{\alpha - \beta \mathcal{E}_j}}$$

Por la bosonoj

$$w_{\underline{n}} = \binom{g_i - 1 + n_i}{n_i}$$

kio kontas la statojn kiuj ponas  $g_i - 1 + n_i$  objektoj ( $g_i - 1$  barieroj kaj  $n_i$  partikloj) prenitaj  $n_i$  je  $n_i$ . Ĝenere:

$$Q_N(V, \mathcal{T}) = \sum_{\underline{n}_p} \prod_{\mathbf{p}} \left( e^{-\beta \frac{\mathbf{p}^2}{2m} n_{\mathbf{p}}} \right)$$

$$\mathcal{E} \leq \mathcal{E}_{\underline{n}} \leq \mathcal{E} + \Delta$$

Simile al ekzemplo de la klasika statistiko oni havas

$$\rho_{mikro} = \sum_{\underline{n}} \frac{|\underline{n}\rangle \langle \underline{n}|}{\Omega(\mathcal{E})}$$

$$\sum_{\underline{n}} \langle \underline{n} | \underline{n} \rangle = 1$$

Kie  $\Omega(\mathcal{E})$  estas la numero de aŭtostatoj de energio ene la intervalo. Oni povas obteni ankaŭ ia media incohera per

$$\hat{\rho}_{kanona} = \sum_{\underline{n}} \frac{e^{-\beta \mathcal{E}_{\underline{n}}} |\underline{n}\rangle \langle \underline{n}|}{\sum_{\underline{n}} e^{-\beta \mathcal{E}_{\underline{n}}}} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Tr(e^{-\beta \hat{H}})}$$

$Tr(e^{-\beta \hat{H}}) = Q_N = e^{-\beta A}$ . Oni povas diri ke

$$\begin{aligned} Q_N &= \sum_{\underline{n}_p} \prod_{\mathbf{p}} \frac{1}{n_{\mathbf{p}}!} e^{-\beta \frac{\mathbf{p}^2}{2m} n_{\mathbf{p}}} = \frac{1}{N!} \left( \sum_{\mathbf{p}} e^{-\beta \frac{\mathbf{p}^2}{2m}} \right)^N = \prod_i \frac{e^{-\beta \mathcal{E}_i n_i}}{n_i!} \\ &= \frac{1}{N!} \left( \frac{L^3}{h^3} \int e^{-\beta \frac{\mathbf{p}^2}{2m}} d^3 p \right)^N \quad (\text{klasike}) \end{aligned}$$

kie  $\sum_{\mathbf{p}} \rightarrow 1/h^3 \int d^3 p d^3 q$  por la termodinamika limito.

En la vido grankanona

$$Z(V, \mathcal{T}, \mu) = \sum_{\underline{n}_p} \prod_{\mathbf{p}} \frac{1}{n_{\mathbf{p}}!} \left( z e^{-\beta \frac{\mathbf{p}^2}{2m}} \right)^{n_{\mathbf{p}}} = \prod_{\mathbf{p}} \left( 1 \pm z^{-1} e^{-\beta \frac{\mathbf{p}^2}{2m}} \right)^{\pm} \stackrel{\log}{=} \pm \sum_{\mathbf{p}} \log \left( 1 \pm z^{-1} e^{-\beta \frac{\mathbf{p}^2}{2m}} \right)^{\pm}$$

do oni povas obteni

$$\langle N \rangle = z \partial_z \log Z \stackrel{F=D}{=} \frac{1}{1 + z^{-1} e^{-\beta \frac{\mathbf{p}^2}{2m}}} \stackrel{B=E}{=} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{z^{-1} e^{-\beta \frac{\mathbf{p}^2}{2m}} - 1}$$

Pasinte al la klasika priskribo  $\sum_{\mathbf{p}} \rightarrow V/h^3 \int d^3 p$  la

$$\frac{\mathcal{P}V}{k\mathcal{T}} = \log Z = \pm \sum_{\mathbf{p}} \log(1 \pm z e^{\beta \mathcal{E}_{\mathbf{p}}})$$

Solvas oni tiun integralon en  $p$  en polaraj koordinatoj esprimiĝante la logaritmo per serio akirante

$$\frac{\mathcal{P}}{k\mathcal{T}} = \frac{1}{\Lambda^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\mp)^{l+1} z^l}{l^{5/2}} \tag{7.8}$$

Definos oni  $f_{5/2} = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} z^l / l^{5/2}$  pro fermionoj kaj  $g_{5/2} = \sum_{l=1}^{\infty} z^l / l^{5/2}$  pro bosonoj. Oni povas vidi ke.

$$\langle n \rangle = \frac{\langle N \rangle}{V} = z \partial_z \frac{\mathcal{P}}{k\mathcal{T}} = \frac{1}{\Lambda^3} z \partial_z g_{5/2} = \frac{g_{3/2}}{\Lambda^3} + \frac{1}{V} \left( \frac{z}{z-1} \right)$$

kaj simile per la fermionoj. La termo  $z/(z-1)/V$  estas la okupado de la  $\langle n_0 \rangle$  nivelo.

La mez numero de okupo estas

$$\sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} = N$$

$$\langle N \rangle = \sum_{\mathbf{p}} \langle n_{\mathbf{p}} \rangle$$

$$\langle n_{\mathbf{p}} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{\{n_{\mathbf{p}}\}} n_{\mathbf{p}} e^{-\beta \sum \varepsilon_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}} = -\partial_{\beta \varepsilon_{\mathbf{p}}} \log(Z) = \frac{z e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{p}}}}{1 \mp z e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{p}}}}$$

Statistikoj de respektive Bose-Einsten kaj Fermi-Dirac. Oni povas vidi du gravaj rezultoj de tiu esprimo por malalta temperaturo.

Oni volas montri la kvanteco de la kvantuma korektado al la termodinamika limito.

$$\Lambda^3 \mathbf{n} \stackrel{B-E}{=} \sum_l \frac{z^l}{l^{3/2}} \quad z = \Lambda^3 \mathbf{n} + O((\Lambda^3 \mathbf{n})^2) \quad \Lambda^3 \mathbf{n} = \sum_i \frac{(\Lambda^3 \mathbf{n})^i}{l^{3/2}}$$

$$\frac{\mathcal{P}}{k_B \mathcal{T}} = \frac{1}{\Lambda^3} \sum_j \frac{z^j}{j^{5/2}} = \frac{1}{\Lambda^3} \sum_i \frac{1}{i^{5/2}} \left( \sum_j \frac{(\Lambda^3 \mathbf{n})^j}{j^{3/2}} \right)$$

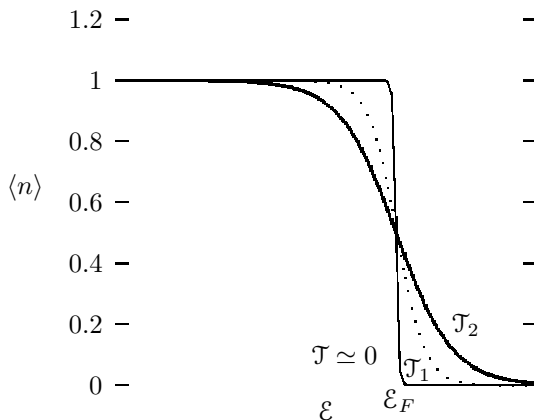
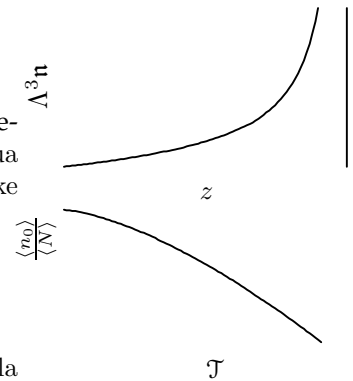
$$\frac{\mathcal{P}}{k_B \mathcal{T}} = 1 - \frac{\Lambda^3 \mathbf{n}}{2^{5/2}} + \dots$$

kiu montras ia atraktiva efekto. Fakte oni povas vidi ke se la temperaturo en la Bose-Einstein-a statistiko  $\mathcal{T} \rightarrow 0$  sekve  $z \rightarrow 1$  ĉiuj la okupadoj valoroj apartenas al unua stato  $\langle n_0 \rangle \rightarrow \infty$  kiu nomiĝas **|Bose Einstein-a Kondenso|**. Oni povas vidi ankaŭ ke

$$1 = \frac{\Lambda_k^3}{\Lambda^3} + \frac{\langle n_0 \rangle}{\langle N \rangle} \quad \frac{\langle n_0 \rangle}{\langle N \rangle} = 1 - \left( \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}_k} \right)^{3/2}$$

prefere al la faza transiro je la kritiko temperaturo oni sentas la kvantuma efekto.

En la Fermi Dirac-a statistiko por  $\mathcal{T} \rightarrow 0$  ĉiuj statoj estas okupitaj kaj egalas al la numero de partikloj. **|Fermi-a Energio|**



<Fermi-a Energio

Por iu obscilitoro armonika de ekvacio  $\underline{H} = \hbar^2/2m\partial_{\underline{x}}^2 + \alpha/2\underline{x}^2$  la aŭtostatoj de la oscilatoro armonika estas

$$\mathcal{E}_n = \hbar\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\left(\frac{1}{2} + n\right)$$

por  $N$  partikloj, mallonge de  $0 = K$  Kelvin, oni obtenas ke la energio Fermi-a estas  $\mathcal{E}_{\mathcal{F}} = \mathcal{E}_{N-1}$ , aŭ la maksimuma energio kiu povas havi tiu  $N$  partikloj. Se havas oni  $\mathcal{T} \ll T_F$  oni volas dekvovi la presiono de la Fermi-a maro.

$$\mathcal{E} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{E}_n$$

$$\mathcal{P} = \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{\langle n_{\mathbf{p}} \rangle}{V}\right) \sum_{p_x > 0} \left(\frac{A p_x}{m}\right) (2p_x)$$

$p$  unuas ene  $p_F$  kaj nuliĝas ekstere.

$$\frac{N}{V} \sum_{\mathbf{p}} \langle n_{\mathbf{p}} \rangle \frac{p_F^2}{m} = \frac{v}{h^3} \frac{1}{3} \int_{|\mathbf{p}| < p_F} \mathbf{p}^2 d^3 p = \frac{1}{h^3} \frac{4\pi}{3} \int_0^{p_F} p^4 dp$$

$\mathcal{P}V/k\mathcal{T}$  egalas  $\beta(\mathcal{E}_F - \mathbf{p}^2/2m)$  per  $\mathbf{p}^2/2m > \mathcal{E}_F$  kaj nulas inverse.

$$\frac{\mathcal{P}V}{k\mathcal{T}} = \sum_{\mathbf{p}} \log(1 + ze^{-\beta\mathcal{E}_{\mathbf{p}}}) = \frac{V}{h^3} \frac{4\pi}{k\mathcal{T}} \int_0^{p_F} p^2 \left(\frac{p_F^2}{2m} - \frac{p^2}{2m}\right) dp$$

$$N/V = \langle N \rangle / A$$

La kimika potencialo estas la energio petita por enmeti en la sistemo nvan partiklon al la nula energio.

△

Du aŭtostatoj

Oni havas  $N$  partikloj de maso  $m$  en volumo  $V$  en aŭtostatoj  $\{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1\}$  kun indico de [degenerazione]  $g_1, g_2$  por  $\mathcal{E}_{\mathbf{p},v} = \mathbf{p}^2/2m + \mathcal{E}_n$  oni havas ĝenere

$$Q_N = \frac{1}{N!} \left( \sum_{\mathbf{p},n} e^{-\beta\mathcal{E}_{\mathbf{p},n}} \right)^N = \frac{1}{N!} \left( \sum_n e^{-\beta\mathcal{E}_n} \sum_{\mathbf{p}} e^{-\beta\frac{\mathbf{p}^2}{2m}} \right)^N = \frac{V^N}{\Lambda_G^{3N} N!} \left( \sum_n g_n e^{-\beta\mathcal{E}_n} \right)^N$$

La interna energio kaj la terma koefiĉento al kostanta volumento estas

$$\mathcal{U} = \langle H \rangle = -\partial_{\beta} \log(Q_N) \quad C_V = \partial_{\mathcal{T}} \mathcal{U}$$

△

Fariĝas oni la sumo sur la statoj kaj ne sur la energioj.

Centroj Adsorbaj

En ia gaso ( $m, N, V, \mathcal{T}$ ) oni havas  $M$  centraj adsorbaj kiuj povas kapturi partiklon kun energio  $-\mathcal{E}_0$ . Trakas oni tiu sistemo kiel ia grankanona ĉar la gaso estas kiel termostato rilate la centrojn.

$$Z = \Pi_1^M (1 + ze^{\beta\mathcal{E}_0})$$

La centroj agas kiel Fermi-aj statoj kaj sumigas oni sur la sotoj kaj ne sur la energioj. La mez valoro de partiklaj adsorbaj estas

$$\langle N \rangle_{ads} = z \partial_z Z = M \left( \frac{ze^{\beta\mathcal{E}_0}}{1 + ze^{\beta\mathcal{E}_0}} \right)$$

Se havas oni du adsorb centraj specoj oni kalkulas la  $Z$  grankanona produktante la sumo de ĉiuj centraj okupitaj. 1 signifas ke la centroj ne estas okupita,  $z_A e^{\beta\mathcal{E}_A}$  signifas ke la centroj de speco A estas okupita, kaj  $z_B e^{\beta\mathcal{E}_B}$  rilatas la B-ajn specojn. Do

$$Z = \Pi_1^M (1 + ze^{\beta\mathcal{E}_A} + e^{\beta\mathcal{E}_B})$$

△

Fotonoj

$\mathcal{E}_{\mathbf{p}} = c|\mathbf{p}|$ ,  $\mathcal{U} = 3\mathcal{T}V$  estas bosonoj kaj havas spin  $\pm 1$ . En la materio haviĝas oni la **Fononoj** kiu havas la sonrapido astataŭ de la lumrapideco. Oni ne povas determini la numero de fotonoj ĉar ili povas malkovri darinte energio al la atomoj. La kvantaj numeroj estas  $(\mathbf{p}, s)$  kaj oni elprenas indicon indikantan deĝeneron statan  $g$ . Ĝenere  $g = 2s + 1$  sed fotonoj havas nur du aŭ tostatoj do  $g = 2$ . Havas oni deĝenero, ekzemple, se, sine magnetika kampo, la spin ne akiras divers enrgiajn nivelojn. Do

$$Z = \prod_{\mathbf{p}, s} (1 + ze^{\beta \mathcal{E}_{\mathbf{p}, s}}) = \prod_{\mathbf{p}} (1 + ze^{\beta \mathcal{E}_{\mathbf{p}}})^2$$

Per fiksa numero de fotonoj sercas oni kiam estas minusa la energio libera Helmholtz-a al  $\mathcal{T}$  fiksa.  $\partial_N \mathcal{A} = 0 \Rightarrow \mu = 0 \quad z = 1$

$$\frac{\mathcal{P}V}{k\mathcal{T}} = \frac{8\pi V}{n^3 c^3 \beta^3} \sum_l \frac{1}{l} \int_0^\infty y^2 e^{ly^2} dp = \frac{8\pi V}{n^3 c^3 \beta^3} \sum_l \frac{1}{l} \partial_l^2 \frac{1}{l} = \frac{8\pi V}{n^3 c^3 \beta^3} \sum_{l=1}^\infty \frac{2}{l^4}$$

Poste kaj simile

$$\mathcal{U} = 2 \sum_{\mathbf{p}} c|\mathbf{p}| \frac{1}{e^{\beta c|\mathbf{p}|} - 1} = \frac{zV}{h^3} 4\pi \int_0^\infty p^2 cp \sum_l e^{-\beta lcp} d^3 p = \frac{8\pi V (k\mathcal{T})^4}{c^3 h^3} \sum_{l=1}^\infty \frac{6}{l^4}$$

Sekvas  $\mathcal{U} = 3k\mathcal{T}$

△

### 7.3 Ekzercoj

<Presiono

Oni havas gason en skatolon de lato  $L$ . Oni kalkulas la mez valor de la impulso sur flanko  $A$ . Oni havas la distribua funkcio kiel

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\Lambda}{h^3 V} \int e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} d^3 p \int_{Apt/m} d^3 q$$

kie  $At p_x / m$  estas la volumo okupita de la partikloj por ĉiuj direcioj de la impulso.

$$\begin{aligned} \langle p_x \rangle_{p_x > 0} &= \frac{At\Lambda^3}{mh^3 V} \int_{p_x > 0} p^2 e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} d^3 p = \frac{2At\Lambda^3}{\Lambda^2 h^3 V} \frac{1}{2} \int \partial_\beta e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} dp_x = \\ &= \frac{At\Lambda}{h^3 V} \partial_\beta \int e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} dp_x = \frac{At\Lambda}{h^3 V} \left( -\frac{1}{k\mathcal{T}^2} \partial_{\mathcal{T}} \sqrt{2\pi m k\mathcal{T}} \right) = \frac{At\Lambda}{2\Lambda V} k\mathcal{T} = \frac{At}{2V} k\mathcal{T} \end{aligned}$$

Presiono estas  $\mathcal{P} = \langle p \rangle / At$  do  $\mathcal{P} = Nk\mathcal{T} / V$  kiu estas la ekvacio de la ideala gaso.

△

La statoj de spin estas  $g = 2S + 1$ .

<Fermionoj

$$v = \frac{V}{N}$$

$$Z = \prod_{\mathbf{p}, \varepsilon} \left( 1 + ze^{-\frac{\beta p^2}{2m}} \right) = \prod_{\mathbf{p}} \left( 1 + ze^{\beta \mathcal{E}_{\mathbf{p}}} \right)^g \quad (7.9)$$

$$\langle N \rangle = z \partial_z \log Z = \frac{gV}{\Lambda^3} f_{3/2}(z) \quad \frac{\mathcal{P}}{k\mathcal{T}} = g\Lambda^3 f_{5/2}(z).$$

Per  $\mathcal{T} \rightarrow 0$

$$p_F^2 / 2m = \mathcal{E}_f$$

$$\langle N \rangle = g \sum_{\mathbf{p}} \langle n_{\mathbf{p}} \rangle = g \sum_{|\mathbf{p}| \leq p_F} 1 = g \frac{V}{h^3} \int_{|\mathbf{p}| \leq p_F} d^3 p = g \frac{V}{h^3} \frac{4}{3} \pi p_F^3$$

$$\langle N \rangle = g 2\pi \frac{V(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^{\mathcal{E}_F} \sqrt{\mathcal{E}} d\mathcal{E} = g 2\pi \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \mathcal{E}_F^{3/2} \frac{2}{3}$$

$$\mathcal{P}V = 2/3\mathcal{U}$$

$$\mathcal{U} = g \sum_{\mathbf{p}} \langle n_{\mathbf{p}} \rangle \mathcal{E}_{\mathbf{p}} = g 2\pi V \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \frac{\mathcal{E}_F^{5/2}}{5/2} = \langle N \rangle \frac{3}{5} \mathcal{E}_F$$

$v_1$	$v_2$
$1/2$	$3/2$
$m$	$m$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{V} \frac{2}{3} \mathcal{U} = \frac{3}{5} \mathcal{E}_F N / V = \frac{2\mathcal{P}}{5\hbar^2} \frac{1}{2m} \left( \frac{6\pi^2}{g v^{5/2}} \right)^{2/3}$$

Oni havas spacoon due separitan, en la unua parto partikloj havas spin  $S = 1/2$  dume en la dua  $S = 3/2$ .  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$

$$\frac{2}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{6\pi^2}{2v_1^{5/2}} \right)^{2/3} = \frac{2}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{6\pi^2}{4v_2^{5/2}} \right)^{2/3}$$

$$z = \frac{\Lambda^3}{v} \frac{1}{g} + a \left( \frac{\Lambda^3}{V} \right)^2 + \dots$$

$$\left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{5/2} = 1/2 \quad v_2 = \left( \frac{1}{2} \right)^{2/5} v_1$$

$$\frac{1}{v} = \frac{g}{\Lambda^3} \left( z - \frac{z^2}{2^{1/2}} + \frac{z^3}{3^{3/2}} + \dots \right) = \frac{g}{\Lambda^3} \left( \left( \frac{\Lambda^3}{g v} + a \left( \frac{\Lambda^3}{v} \right)^2 + \dots \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Lambda^3}{g v} + \dots \right)^2 + \dots \right)$$

$$a = 1/g^2 \cdot 1/2^{3/2}$$

$$\frac{1}{V} = \frac{g}{\Lambda^3} \left( \frac{\Lambda^3}{g v} + a \left( \frac{\Lambda^3}{v} \right)^2 + \dots - \frac{1}{g} \frac{1}{2^{3/2}} \left( \frac{\Lambda^3}{v} \right)^2 + \dots \right)$$

$$z = \frac{\Lambda^3}{v} \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} \frac{1}{2} \frac{1}{2^{3/2}} \left( \frac{\Lambda^3}{v} \right)^2 + \dots$$

$$\frac{\mathcal{P}}{k_B \mathcal{T}} = \frac{g}{\Lambda^3} \left( z + \frac{z^{2^{5/2}}}{2} + \dots \right) = \frac{g}{\Lambda^3} (\dots) = \frac{1}{v} + \frac{g}{\Lambda^3} \frac{1}{2^{2/5}} \left( \frac{\Lambda^3}{v} \right)^2$$

$$\frac{\mathcal{P}V}{k_B \mathcal{T}} = 1 + \frac{1}{g^{2/5}} \frac{\Lambda^3}{v}$$

△

Bose-Einstein-a Kondenso

$$v/\Lambda_k^3 g_{3/2}(1) = 1$$

$$1/v = 1/\Lambda^3 g_{3/2}(1) + \lim_{V \rightarrow \infty} \langle n_0 \rangle / V \quad 1 = v/\Lambda^3 g_{3/2}(1) + \langle n_0 \rangle / \langle N \rangle \quad 1 = \Lambda_k^3 / \Lambda^3 + \langle n_0 \rangle / \langle N \rangle. \text{ La frakcio de kondenso estas } \langle n_0 \rangle / \langle N \rangle = 1 - (\mathcal{T}_k / \mathcal{T})^{3/2}$$

En du dimensio

$$\frac{\mathcal{P}V}{k_B \mathcal{T}} = \dots$$

△

## 7.4 Kampa Priskribo

Se oni havas  $\hat{K}$  operatoro de la sistemo, sumo de la Hamilton-a  $\hat{H}$  kaj de la numero de partikloj  $\mu \hat{N}$  oni povas uzi Matsubara vidadon por skribi la Green-a funkcio en perturbata iterado

Tiu kaze  $\vec{x} = (\mathbf{x}, \tau)$  kie  $\tau$  estas reala numero, ofte  $1/\beta = k_B \mathcal{T}$

$$G_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{x}') = -e^{\beta A} \text{tr} \left( e^{-\beta \hat{K}} \hat{\psi}_{\alpha, M}(\vec{x}) \hat{\psi}_{\beta, M}^\dagger(\vec{x}') \right)$$

$$\hat{K}_0 = \hat{H}_0$$

kiu en la interad vidado skribos

$$G_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{-\text{tr} \left( e^{-\beta \hat{K}_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\hbar)^n}{n!} \int_0^{\beta \hbar} d\mathcal{T} T_\tau [\hat{\mathcal{Y}}(\tau) \hat{\psi}_{I\alpha}(\vec{x}) \hat{\psi}_{I\beta}(\vec{x}')] \right)}{\text{tr} \left( e^{-\beta \hat{K}_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\hbar)^n}{n!} \int_0^{\beta \hbar} d\mathcal{T} T_\tau [\hat{\mathcal{Y}}(\tau)] \right)}$$

kie oni havas uzita la bone notita difino de la libera energio  $\mathcal{A}$ 

$$e^{-\beta A} := \text{tr} \left( e^{-\beta \hat{K}} \right) \quad \hat{\rho}_G := e^{\beta(A - \hat{K})}$$

por difini la normaligita grand kanoka funkcio  $\rho_G$ . La priskribo estas tute egala al la nula temperatura priskribo, oni uzos la Wick-an teoremon, la Feynmann reglojn, la Dyson ekvaciojn ktp.

Oni povas uzi tiu priskribo por kalkuli la adiabatican [switching on] per la variado de la parametro  $\lambda$ ,  $\hat{K} = \hat{H}_0 + \mu \hat{N} + \lambda \mathcal{V}$ . Do

$$Z_{G\lambda} := e^{-\beta A \lambda} \quad \partial_\lambda \mathcal{A} = -\frac{\mathcal{T}}{Z_{G\lambda}} \partial_\lambda Z_{G\lambda}$$

tiu derivaĝo sur eksponenta serio donas

$$\partial_\lambda Z_{G\lambda} = \partial_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} \text{tr}(\hat{H}_0 + \lambda \hat{V})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} \partial_\lambda \text{tr}(\hat{H}_0 + \lambda \hat{V})^{n-1} \hat{V}$$

kiu disvolvigos en

$$\partial_\lambda Z_{G\lambda} = -\frac{\beta}{\lambda} e^{-\beta \mathcal{A}\lambda} \langle \lambda \hat{V} \rangle_\lambda \quad \mathcal{A} - \mathcal{A}_0 = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \langle \lambda \hat{V} \rangle_\lambda$$

Ke, kiel oni vidis en la kvantuma ĉapitro, oni devolvigas en

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \mp \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \int d^3x \lim_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}} \frac{1}{2} \left( -\partial_\tau + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right) \text{tr} G^\lambda(\vec{x}, \vec{x}')$$

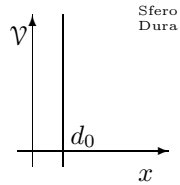
## 7.5 Faza Transiro

Oni volas konstrui traktadon kiu povas priskribi la [comportamento] de la molekuloj en *ensamble* kaj malkovri la ekvaciojn kiuj priskribu la transiro de fazo. Fenomeno tre difiĉila priskribi ĉar oni havas [rottura] de *ergodeco* kaj ne pli valoras la postulatoj de la Statistika Mekaniko. Do oni devas difini potencialon kiu interagas inter la partikloj por provi al apliki la uze traktadon supre priskribitan.

Komence oni povas priskribi la sistemon kiel simple interado de sferoj Kune tiu simple potencialo oni povas diri ke la molekuloj moviĝas libere en la volumeno sed ne povas okupi la poziciojn de la aliajn. Si oni enmetas partiklon tiu havas  $V$  libera volumeno. Si oni enmetas iu ali partiklon tiu havas  $V - V_{sf}$  kiel libera volumeno. Iu tria havus  $V - 2V_{sf}$  libera volumeno (tie ne kalkulas ke se du sferoj estas [vicine] la libera volumeno estas pli granda ĉar surposicias la volumeno de interado). Oni volas trovi la funkcio partaga

$$Q_N(V, \mathcal{J}) = \frac{1}{\Lambda^{3N} N!} \int d\mathbf{x} e^{-\beta \mathcal{V}(\mathbf{x})} \quad \mathcal{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i < j} V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) + \sum_i \mathcal{U}(\mathbf{x}_i)$$

En la sfera dura modelo  $\mathcal{U}$  estas nula kaj  $\mathcal{V}$  nuligās se la distanco de  $|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|$  estas pli malgranda de  $d_0$ . Oni povas kalkuli la produkton de ĉiuj posiciaj konfiguradoj  $V \prod_{s=0}^{N-1} (1 - (sV_0)/V)$  kaj sia logaritmo proksimigante



$$V_0 \ll V \quad \sum_i^N i \simeq \frac{N^2}{2}$$

$$\ln V \prod_{s=0}^{N-1} \left(1 - s \frac{V_0}{V}\right) \simeq \sum \ln V + \sum_{s_0}^{N-1} \left(0 - \frac{sV_0}{V} + O\left(\frac{sV_0}{V}\right)^2\right) \simeq N \ln V - \frac{N^2}{2} \frac{V_0}{V}$$

Kie  $V_0$  estas ok fojoj la volumeno de la dura sfero kaj oni difinas  $b := NV_0/2$ . Oni do obtenas

$$Q_N^{sd}(V, \mathcal{J}) \simeq \frac{1}{N! \Lambda^{3N}} \left(V - \frac{NV_0}{2}\right)$$

Oni povas ankaŭ utiligi la **|Proksimaĝo de Media Kampo|** pensante de havi potencialo [attrattivo] kiu agas medie sur ĉiujn partiklojn.

$$\langle \mathcal{V} \rangle := \frac{\int_{|\mathbf{x}| > V_0} d\mathbf{x} \mathcal{V}(\mathbf{x})}{\int_{|\mathbf{x}| > V_0} d\mathbf{x}} = \frac{\alpha N(N-1)}{2V} \quad Q_N(\mathcal{J}, \mathcal{V}) \simeq e^{-\frac{\beta \alpha N^2}{2V}} \int_V d\mathbf{x} e^{-\beta \sum_{i < j} V_{sd}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)}$$

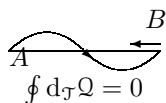
Kun la sekvanta distribua funkcio

$$Q_N(\mathcal{J}, V) \simeq \frac{1}{N! \Lambda^3} (V - b)^N e^{\frac{\alpha N^2}{2k_B \mathcal{J} V}}$$

oni povas trovi la presiono kiun oni scias kalkuli per  $\mathcal{P} = -\partial_V \mathcal{A}$  kaj derivi la ekvacio  $\mathcal{A} = -k_B \mathcal{J} \partial_V \ln Q_N$

de stato notita kiel |Van der Waals-a Ekvacio|

$$\frac{\mathcal{P}}{k_B \mathcal{T}} = \frac{N}{V - b} - \frac{\alpha N^2}{2k_B \mathcal{T} V^2} \quad \left( \mathcal{P} + \frac{\alpha N^2}{2V^2} \right) (V - b) = nk_B \mathcal{T}$$



La Van der Waals ekvacio estas bona proksimaĝo inter la idealgasa stata ekvacio kaj la transiro de faza sed ne montras la [comporamento] de la gaso en la horizontala trakto. Maxwell diris ke la tia ciklo estas isoterma ĉar la integralo inter la punktoj A kaj B samas en la du direktoj.

Oni povas enkonduki potencialon kiu kungi la partikloj. Oni traktas la distibuan funkcion kun Lennerd Jones-a potencialo kun tiu priskribo

$$Q_N = \frac{1}{N! \Lambda^N} \int d\mathbf{x} e^{-\beta \sum_{i < j} \epsilon \left( \left( \frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^6 \right)} = \frac{1}{N! \Lambda^N} \prod_{i < j} \int d\mathbf{x}_{ij} f_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$$

Kun  $f_{ij} = \exp(-\beta \mathcal{V}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j))$  oni havas funkcion limitata en la intervalo  $[0, R_0]$  en kiu la potencialo agas (oni uzas potencialon de *range* finita. Si oni disvolvigas la pa produkton oni vidas iniciu la termon 1 de produkto de ĉiuj 1-oj, poste la produkton de la singlaj  $f_{ij}$  moplilikitaj per la 1-oj, la produkton de la duoplaj  $f_{ij} f_{ik}$  kaj tiel pli

$$1 + f_{12} + f_{23} + \dots + f_{12} f_{23} + f_{23} f_{34} + \dots + f_{12} f_{23} f_{34} + \dots$$

La  $f_{ij}$  prezentas la interadoj inter la partikloj. Oni volas montri la bildon diagramatikan de la interadoj. Por ĉiu duoplo oni povas koniugi aŭ ne kun  $2^{N(N-1)/2}$  posiblecoj. Se  $b_l$  estas la sumo de la kontribuoj de  $l$  punktoj, prefere  $l - 1$  ligoj,  $b_1$  estas la sumo de ĉiuj partikloj sine ligoj do la volumeno de la sistemo  $b_1/V = 1$ .  $b_2$  estas la integralo  $\int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 f_{12} = V \int d\rho f(\rho)$

$$b_2 = \frac{1}{2! V \Lambda^3} \cdot V \int d^3 \rho f(\rho) \quad b_3 = \frac{1}{3! V \Lambda^6} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3 f_{12} f_{23} = \frac{1}{3! V \Lambda^6} V \int d\rho f(\rho)$$

Ĝeneraligante

$$b_l = \frac{1}{l! V \Lambda^{3l-3}} (\dots)$$

kie inter ()-oj oni sumas ĉiuj amasoj [distinto]j dume la partaga funkcio  $Q_N$  estas la sumo sur la distintaj grafoj de  $N$  punktoj.

$$\sum_{l=1}^N l m_l = N$$

$$Q_N = \frac{1}{N! \Lambda^{3N}} \sum_{\{m_l\}} s_{\{m_l\}}$$

$$s_{\{m_l\}} = C, C(Vb_1)^{m_1}, C(Vb_1)^{m_1} (2! V \Lambda^3 b_2)^{m_2}, C(Vb_1)^{m_1} \dots (l! V \Lambda^{3l-3} b_l)^{m_l}$$

Pro ĉiu amaso oni povas permuti la  $l$  partikloj  $l!$  fojoj ĉiuj  $m_l$  amasoj, do  $(l!)^{m_l}$ . Oni povas ankaŭ interŝanĝi la amasojn inter ilin  $m_l!$  fojoj. Do la rekta kontakto estas

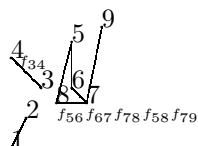
$$C = \frac{N!}{(1!)^{m_1} (2!)^{m_2} \dots (l!)^{m_l} \dots (N!)^{m_N} m_1! m_2! \dots}$$

oni havas

$$Q_N = \frac{1}{N! \Lambda^{3N}} \sum_{\{m_l\}} s_{\{m_l\}} = \frac{1}{N! \Lambda^{3N}} \sum_{\{m_l\}} N! \Lambda^{3N} \prod_{l=1}^N \left( \frac{V b_l}{\Lambda^3} \right)^{m_l} \frac{1}{m_l!}$$

$$Z(z, V, \mathcal{T}) := \sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N$$

en la vido grandkanona oni esprimas la disvolvo de la stata ekvacio laŭe la *viriale*





$$Z(z, V, \mathcal{T}) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{m_l\}} \prod_{l=1}^N \left( \frac{V b_l z^l}{\Lambda^3} \right)^{m_l} \frac{1}{m_l!} = \prod_{l=1}^{\infty} \sum_m \left( \frac{V b_l z^l}{\Lambda^3} \right)^m \frac{1}{m!} = e^{\sum_{l=1}^{\infty} \frac{b_l}{\Lambda^3} V z^l}$$

oni do povas skribi la stato ekvacio kiel disvolvo de la *viriale*

$$\frac{\mathcal{P}}{k_B \mathcal{T}} = \frac{1}{\Lambda^3} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_l = 1^\infty b_l z^l$$

Kiam oni havas disvolvon de  $Z$  en povecoj de  $z$  oni povas studi la sistemon per la nuloj de la sistemo. La senfina polinomio havas senfinajn nulojn. Tiuj nuloj estas ĝenere en la kompleksa akso kaj havas preskaŭ ĉiam ne nul imaginan parton. Kiam nulo havas nur realan valoron oni havas [accumulazione] de la aliaj punktoj ĉirkaŭe ĉi tiu. Se oni povas trovi trakton de la reala akso kiu ne plitenas nuloj la limito de la funkcio verse tiu nulo estas analitika.

**Young**

Th:

Si

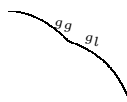
$$F_\infty(z, \mathcal{T}) := \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\ln Z(z, V, \mathcal{T})}{V}$$

estas [kontinua] kaj malkreskante sia derivaĝo  $z \partial_z$  estas analitika kaj strekte malkreskante. Pro ĉiu  $z_0$  en  $\mathbb{R}$  oni havas du reĝionoj de analiteco

⊗

Oni do povas distingi inter la faze transiro de unua aŭ dua ordo vidante la malkontinueco de la derivaĝoj. La faza tranziro al la unua ordo havas kuneksisto de la du statoj en la ekvilibrio, en la dua ordo la sistemo pasas kontinue de uno stato al la alia. Oni povas difini la |**Parametro Orda**| kiu estas la variablo kiu montras la malkontinueco al la kritika punkto. Si oni konsideras  $\mathcal{P}(V)$  kiel orda parametro oni povas vidi ke sia derivaĝo estas malkontinua al la unua ordo. Si oni anstataŭ konsideras  $V_{gaso} - V_{likvido}$  la orda parametro estas de dua ordo. Dume la faza tranziro oni havas la  $m_g$  mason de la gaso kaj la  $m_l$  mason de la likvido kaj oni povas uzi energion per ŝanĝi la ininitezima kvanteco de likvida maso en gasa  $-\delta m_l = \delta m_g$ . La Gibbs-a energio estas do difinita kiel  $G = m_l g_l + m_g g_g$  kaj oni povas derivi la entropio per  $\partial_{\mathcal{T}} G$  akirante du diversaj valoroj de la entropio  $\mathcal{S}_g$  kaj  $\mathcal{S}_l$ . Oni do havas angulan punkton kiu estas la sigulareco de la sistemo. En tiu punkto oni povas vidi la **Ergodeca Rompo** kaj la sistemo perdas la simetron de la mekanika statistiko priskribo. En tiu punkto oni havas rompon ĉar oni havas gravan fluktudon de la denseco ĉirkaŭe la ekvilibrio. En la unua ordo oni havas ankaŭ fenomenoj kiel la senfiniteco de la komprimo en la kritika pukto

Angula punkto



$$K(\mathcal{T}, V_c) = \frac{1}{V} \partial_{\mathcal{P}} V \Big|_{\mathcal{T}} \rightarrow_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_c} \frac{A}{(\mathcal{T} - \mathcal{T}_c)^\gamma}$$

dume al la dua ordo la specifa kaloro estas

$$C_V \mathcal{T}_d \mathcal{S} \rightarrow |t|^{-\alpha}$$

La afero pli grava estas la |**Longeco Karatkeriza**| de la sistemo. La korelacio de la denseco kreskas kiel

$$G(r) = \langle \mathbf{n}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{0}) \rangle - \langle \mathbf{n}(\mathbf{0}) \rangle \propto \frac{1}{r^{d-2-\eta}} e^{-r/\xi}$$

en la kritika punkto la karakteriza longeco

$$\xi \propto t^{-\nu} \rightarrow_{t \rightarrow 0} \infty \quad t := \frac{\mathcal{T} - \mathcal{T}_k}{\mathcal{T}}$$

Kiam  $\xi \rightarrow \infty$  oni povas ŝanĝi la skala faktoro de la retiklo kiu transformas per

$$r' = r/b \quad G(r') =_{t \rightarrow 0} b^{d-2-\eta} G(r)$$

oni do ne povas pli rekoni la pligrandigo de la sistemo. Kiel fraktalo la sistemo samas pro iu ajn skala faktoro, krom makrokopike. Oni do enkondukas faman modelon kiu priskribas tipoj de modeloj

## 7.6 Ising-a Modelo

La Ising-a modelo naskis kiel modelo pro kalkuli la magnetizaĵo spontanea de la fermetaloj sed plialtigis sian priskribon traktinte ĉiuj fenomenoj kiu havas *du grada transiro* kaj *simetria rompiĝo*. Tia modelo estas diskreta, oni vidas ĉiujn elektonojn en fiksa pozicio de la retiklo. La elektonoj estas priskribitaj per siaj *spin* kaj la oriento de ĉiuj *spin* povas kompleksive montri la rompiĝon de la simetrio. Tiuj fenomenoj forte dependas de la temperaturo. En la pli baza Ising-a modelo la sistemo dependas sole de la temperaturo  $\mathcal{T}$ , la eksterna magnetika kampo  $H$  kaj la kostanto de parigo  $K$  inter du proksimaj *spin*. La Hamilton-a de la sistemo estas

$$H = K \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j + H \sum_i s_i$$

kie  $\langle ij \rangle$  signifas la sumo inter du **Unua Apudoj**, prefere kun la ĉiuj elektonoj kiuj troviĝas al la sama distanco, la pli apuda.

Oni povas pluen difini aliajn grandecojn kiuj estas utilaj por kompreni la grandecoj de la sistemo. La **Magnetizaĝo** kaj la

$$M := \langle \mu_0 \sum_i s_i \rangle$$

# Capitolo 8

## Procesoj Stokastikaj

La stokastika proceso aŭ signalo estas nedetermina proceso  $g$ , ofte konsiderita sole per la tempa variabla  $g = g(t)$ , de kiu oni scias sole sia statistikaj ecoj. La stokastikaj procesoj povas esti **stacionaraj** se la statistikaj ecoj ne variigas en la tempo kaj povas esti **ergodecaj** se ĉiuj procesoj en la sama tempo evolvigas simile. Oni povas priskribi ian proceson per sia **|Probabla Denseco|** kiu estas kiu estas difinita per

### 8.0.1 Mat: Asioma Difino de la Probabla Mizuro

Mat

✓

La Funkcio  $\mathcal{P}(t)$  estas ...

Kun la probabla denseco oni povas difini la momantojn de la proceso. La **|Probabla Momanto|** estas la sumo de ĉiuj valoroj al la  $n$  potenco per la probabla denseco en tiu punkto.

$$m_n := \int dx x^n \mathcal{P}(x) \stackrel{a\ddot{u}}{=} \frac{1}{N} \sum_i^N x_i^n = \sum_i^M x_i \mathcal{P}_i$$

kir  $\mathcal{P}_i$  estas la fekvenco de apero de la  $M$  diversaj variabloj  $x_i$  en la kampiono. La unua momanto estas la medio kun kiu oni povas konstrui centrajn momantojn

$$\bar{x} := \int dx x \mathcal{P}(x) \stackrel{a\ddot{u}}{=} \frac{1}{N} \sum_i^N x \quad m_n^c := \int dx (x - \bar{x})^n \mathcal{P}(x) \stackrel{a\ddot{u}}{=} \sum_i^M (x_i - \bar{x})^n \mathcal{P}_i$$

La pli grava centra momanto estas la dua ankaŭ nomita **|Varianco|**.

## 8.1 Distribuoj

### 8.1.1 Difinoj

**Probableco**

**Medio**  $\langle x \rangle := \hat{x} := \int_{-\infty}^{\infty} x \mathcal{P}(x) dx$

**Varianco**  $\sigma := \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

**Probableco Kumulita**  $P(a < x < b) := \int_a^b \mathcal{P}(x) dx$

$P(-\infty < x < \infty) \stackrel{!}{=} 1$

**Maksimumo, Mimumo**  $q_0 := \min(x_i), q_4 := \max(x_i)$

**Kvartilo**  $q_1 | P_{q_1} := P(-\infty < x < q_1) \stackrel{!}{=} 1/4, q_2 | P_{q_2} \stackrel{!}{=} 1/2, q_3 | P_{q_3} \stackrel{!}{=} 3/4$

**Mediano**  $q_2 := \mu | P_\mu \stackrel{!}{=} 1/2$

### 8.1.2 Gauss-a, normala

$$\mathcal{P}(x; \hat{x}, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\hat{x}-x)^2}{2\sigma^2}}$$

### 8.1.3 Binomiala

$$\mathcal{P}(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

### 8.1.4 Poisson-a

La probabla distribuada funkcio laŭ la Poisson-a distribuado estas

$$\mathcal{P}(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

#### Th: Centra Limito

- ⊗ Se la numero de procesoj estas granda la distribuado etendas a la normala. . .

De la statistikaj procesoj oni povas ankaŭ priskribi la media potenco de la signalo

$$\mathcal{W}(t_0, T) := \frac{1}{T} \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} |g(t)|^2 dt \quad E_\infty = \int |g(t)|^2 dt$$

dume  $E_\infty$  estas la energio de la signalo tempa limita. La spektro potenca estas anstataŭe la potenco media sur ĉiu frekvencoj

$$P_\infty = \int |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \quad S(\omega) := |\hat{g}(\omega)|^2 = \left| \int g(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2$$

#### Th: Parseval

- ⊗ La kvar modulo de la signalo egalas la kvar modulo de sia Fourier-a transformiĵo. . .

### Korelacioj

La korelacio estas la produkto de du diversaj signaloj en siaj tempa variacio

$$K_{12} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g_1(t) g_2(t - \tau) dt$$

La memkorelacio estas la korelacio de la signalo kun ĝi memo en diversaj tempoj

$$K_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g_1(t) g_1(t - \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) g(t + \tau) dt$$

#### Th: Winer Khintchin

- La spektra denseco de ia signalo estas akirebla transforminte laŭ Fourier la memkorelacio de la signalo kaj inverse

### Parametraj Pruvoj

La parametraj Pruvoj devas sub dri azuntoj validi:

- **Nedependeco grupa sampla**  
ĉiu subjekto populacio povi in ĉiu sampla distribuita esti.
- **Normaleco Distribuada**
- **Varianca Homogeneco**

**T Student-a**

**F Fisher-a**

**Regreso**

**Neparametraj Pruvoj, Frekvenco**

Stataŭ la parametraj ili estas populacia distribuado nedepena, estas mapli zorga sed utilizema kiam la distribuadoj estas ne normalaj.

**Chi kvadrata**

Estas pruvo pri frekvencoj bazita kiu komparas la observitan distribuadon kun la atenditan (teoretikan). Sub la **Nulo Hipotezo**  $\mathbf{H}_0$  la empirikaj frekvencoj egalas la teorikajn  $n_i = \hat{n}_i$ .

$$\chi_c^2 = \sum_i \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i}$$

aŭ du empirikaj aroj interne de la eraro egala estas. Se  $\chi_c^2 < \chi_\alpha^2$  la nulo hipotezo estas konsiderita kun erara probableco  $\alpha$ . La vertoj de  $\chi_\alpha^2$  estas tabulitaj. Alimaniere la hipotezo  $\mathbf{H}_1 = \bar{\mathbf{H}}_0$  estas konsiderita.

**Neparametraj Pruvoj, Rango**

La **Rango de la obeservadoj** konsideras la ordan numeron de la sampla, prefere la indeco  $i$  per la ordenata serio  $\{x_0 < \dots < x_i < \dots < x_N\}$ . Oni uzas tiu metodojn kiam la distribuado ne estas normala aŭ la datoj estas tro malmalutaj aŭ la datoj referas al la sama variabla in rangoj disigitaj.

**8.1.5 Mann-Withney Pruvo, sumo de la rangoj**

Kontrolas kiam du sampla apartenas al la sama distribuado.  $\mathbf{H}_0 : \hat{x}_A = \hat{x}_B$

$n_A, n_B$  estas la numero datoj en la sampla  
 $R$  Rango

$$U = \min \left( \sum_i R_A, \sum_j R_B \right) \quad \mu_u = \frac{n_A(n_A + n_B + 1)}{2}$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{n_A n_B (n_A + n_B + 1)}{12}} \quad Z = \frac{U - \mu_u \pm 0.5}{\sigma_u}$$

prefere:

$$U := n_A n_B + \frac{n_A(n_A + 1)}{2} - R$$

**8.1.6 Mediana Pruvo**

	A	B	
$> \mu$	$x_{1A}$	$x_{1B}$	$x_1$
$\leq \mu$	$x_{2A}$	$x_{2B}$	$x_2$
	$n_A$	$n_B$	$n$

$$\chi^2 = \frac{N(|x_{1A}x_{2B} - x_{2A}x_{1B}| - n/2)^2}{x_1 x_2 n_A n_B}$$

KomputMetodo

Sur  $R$  oni kontrolas se la aroj A kaj B estas:  $\mathbf{H}_0 : p_{A1} \leq p_{APB}$ ,  $\mathbf{H}_1 : p_{A1} > p_{APB}$  montrinte ke:  $\chi_c^2 > \chi_\alpha^2$  kaj  $x_{A1}x_{B2} > x_{A2}x_{B1}$

```
R> data <- matrix(c(xA1, xB1, xA2, xB2), ncol = 2)
R> line.names <- c("A", "B")
R> col.names <- c("1", "2")
R> dimnames(data) <- list(line.names, col.names)
R> alpha <- 0.05;
R> data.chi <- chisq.test(data, correct = FALSE);
R> data.chi$statistic > qchisq(p = alpha,
  df = data.chi$parameter, lower.tail = FALSE);
R> xA1*xB2 > xA2*xB1;
```

○

### 8.1.7 Wilcoxon Pruvo, signa pruvo

Montras la grandecon kaj direcion de du depenaj samplroj.  $\mathbf{H}_0 : \hat{x}_A = \hat{x}_B$ .

$$T^+ = \sum R^+ \quad \mu_T = \frac{n_A(n_A + 1)}{4} \quad d = T - \mu_T$$

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{n_A(n_A + 1)(2n_A + 1)}{24}} \quad Z = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T}$$

Per malgranda numeroj  $n < 20$ ,  $\mathbf{H}_0$  konsiderita se  $P(T^+ > \alpha)$  per grandaj numeroj  $n > 20$ ,  $\mathbf{H}_0$  konsiderita se  $Z < Z_\alpha$  kaj  $Z > -Z_\alpha$ .

## 8.2 Bruoj

### Blanka

La blanka bruo estas karakterizita havi la sama frekvenca spektro per ĉiuj frekvencoj. Fizike ĉiuj sistemoj havas pasa bando do ankaŭ la blanka havos iu frekvenco limita. En elektroniko estas frekventa la **|Johnson-a Bruo|** kiu depenas de la temperaturo kaj de la resistenco

### Pafa

Aŭ *shot noise*

1/f

# Capitolo 9

## Materia Strukturo

Poste ĝenerala priskribo de la konceptoj de la kvantuma kaj statistika mekaniko oni volas spcifike priskribi la kazo en kiu troviĝas la natura elementoj kun ĉia proksimaĵoj repetitaj.

### 9.1 Notacioj

Kaze, oni povas voli markiĝi plu la grandecaj ordoj ke la dimensionoj de la grandecoj kiuj estas ofte klaraj. Do nu introdukas la **atomaj unecoj** laŭ kiuj

$$c = \hbar = e = m_e = 1 \quad \mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}u \quad u = 27eV \quad \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$$

Por pli bone kompreni la grandecoj uzitaj oni esprimas ĉiu valoro por sia koresponda energio (en la fekseĝara uneco la  $eV$ ) ekzistante ĉiam ia relacio kiu koniugas la duojn, tiel:

$$\overset{[eV \cdot THz]}{4136} \nu \stackrel{n}{=} h\nu = \mathcal{E} = \frac{\hbar c}{\lambda} \stackrel{n}{=} 1240 \frac{[eV \cdot nm]}{\lambda} \quad \mathcal{E} = k\mathcal{T} \stackrel{n}{=} 8.614 \cdot 10^{-5} \mathcal{T} \overset{[eV/K]}$$

Tabella 9.1: Atomaj Kostantoj

Por kompreni la grandeca ordo la lumo ruĝa estas  $\lambda \stackrel{n}{=} 700[nm]$   $\mathcal{E} \stackrel{n}{=} 1.6[eV]$   
 $\nu \stackrel{n}{=} 500[THz]$   $\mathcal{T} \stackrel{n}{=} 2'400[K]$  kaj tia violkolora  $\lambda \stackrel{n}{=} 450[nm]$   $\mathcal{E} \stackrel{n}{=} 3.2[eV]$   
 $\nu \stackrel{n}{=} 667[THz]$   $\mathcal{T} \stackrel{n}{=} 3'200[K]$

Oni uzos la sekvantaj notacioj: ia ond funkcio de la hidroĝena modelo estas notagita per  $\Psi(x, y, z)$ . Tia solucio estas faktorigebla en

$$\Psi(x, y, z) = R_{\underline{n}, \underline{l}}(r) Y_{\underline{m}}^{\underline{l}}(\phi, \theta) \chi_{\underline{s}}$$

kie  $R_{\underline{n}, \underline{m}}$  estas la funkcioj radia depeno,  $Y_{\underline{m}}^{\underline{l}}$  la sfer harmonikaj kaj  $\chi$  estas fukcio de spin kaj povas esti  $\uparrow (\hbar/2)$  aŭ  $\downarrow (-\hbar/2)$ .

Iu atoma konfigurado estas priskribita per

$$\underline{n} \underline{l}^e$$

aŭ la valoro de la lasta ŝelo okupita (nobla gaso) plus la ŝeloj ne plene okupitaj.  $n$  precipe numeras<sup>1</sup>,  $l$  estas la angulara momanta numero<sup>2</sup> kaj  $e$  numeras la elktronoj kiuj okupas numeron permesitan de la degenero de tiu stato.

<sup>1</sup>skribita per naturalaj numeroj aŭ leteroj  $K, L, M \dots$

<sup>2</sup>skribita per  $s$  *sharp*,  $p$  *principal*,  $d$  *diffuse*,  $f$  *fundamental*

En la optikaj transicioj oni uzos la **Notacio Spektroskopa** por multaj elektronaj atomoj en kiu oni konsideras sole la elektronoj de valento, tiu ke ne ĉeestas en ŝelo plene okupita, kaj kalkulas la kompleksivaj numeroj tiel  $S$  de spin-a multobleco  $L$  de angula momanto kaj  $J$  de totala momanto  $L + S$  skribante

$${}^{2S+1}L_J$$

## 9.2 Korektantaj Termoj (Maldisa Strukturo)

La modelo de la hidroĝena atomo devas konsideri diversaj termoj kiu korektas pli bone la konduto rilate al la esperimentaj valoroj.

La unua aspekto ke oni volas konsideri estas la interacio spin-orbito.

### 9.2.1 Spin-orbito interacio

La rotanta elektrono vidas kampon ĝeneritan pro la rilata movo de la nukleo ĉirkaŭe  $\mathbf{B} = \mathbf{E} \times \mathbf{v}/c$ .  $V(\mathbf{r})$  estu la potencialo de centra kampo:  $V(\mathbf{r}) = 1/r$  en atomaj unecoj. La kampo rezultas estas  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 1/r \partial_r V(r) \mathbf{r}$ . La energio de ia magnetik dipolo kun magnetik kampo estas  $\mathcal{E} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$  do

$$H_{SO} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_S \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2r} \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$$

kie la faktoro  $1/2$  estas la relativeca korektado de Thomas. Oni devas kalkuli

$$\langle n', l', m', s' | H_{SO} | n, m, l, s \rangle$$

kiu dificle kalkulatas pro la ne komutatebleco inter  $\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$  kaj  $\mathbf{l}$  aŭ  $\mathbf{s}$ . Sed la kontribuo de tia termo ne kuntenas la kvant numeron  $n$ ,  $l$  ĉar la korektado elportas la deĝenero de la kvant numeroj  $m$  kaj  $s$ . Oni do priskribas la Hamiltona kun la perturbata metodo.

$$\langle n', l', m', s' | H_{SO} | n, m, l, s \rangle = \mathcal{E}'_{n,l} \langle m', s' | \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} | m, s \rangle \Big|_{n,l}$$

Pro hidroĝenaj atomoj  $1/r \partial_r V = Ze^2/2m^2 c^2 r^3$  do oni povas finfine kalkuli

$$\mathcal{E}_{SO} = \frac{Ze^2}{2m^2 c^2} \frac{|\mathbf{s}|}{(\hbar/2)} \frac{|l|}{(\hbar)} \langle n, m, l | \frac{1}{r^3} | n, m, l \rangle$$

Sciante la mez valoro  $\langle r^{-3} \rangle$  en la kvantuma sekcio oni povas obteni

$$\mathcal{E}_{SO} \simeq \frac{Z^4 e^2 \hbar^2}{4m^2 c^2 a_0^3 n^3 (l + \frac{1}{2})(l + 1)} = |\mathcal{E}_n| \left( \frac{Z^2}{2n(l + 1)(l + 1/2)} \right) \alpha^2 \quad (9.1)$$

kie  $\alpha$  estas la kostanto de fina strukturo aŭ  $e^2/\hbar c \stackrel{n}{=} 1/137$ .  $\mathcal{E}_{SO}$  estas do multe pli malgranda de  $\mathcal{E}_n$  kaj permetas la perturbata priskribo.

### 9.2.2 Relativeca Unua Korektado

Oni havas alian termon kiu formovi la deĝeneron de la  $n$  statoj kiu aperas de relativeca konsidero. Kiel supren  $\mathcal{E}^2 = p^2 + m^2$   $T = \mathcal{E} - m = \sqrt{m^2 + p^2} - m = m(1 + p^2/m^2) - m = m(1 + p^2/2m^2 - p^4/8m^4 + \dots) - m = p^2/2m - p^4/8m^3$ . Nu oni kalkulas  $\langle p^4/8m^3 \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | -\frac{\hat{p}^4}{8m^3} | \psi_n \rangle &= -\frac{1}{2m} \langle \psi_n | \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} \right)^2 | \psi_n \rangle = -\frac{1}{2m} \langle \psi_n | \left( \hat{H}_0 + \frac{Z}{\hat{r}} \right)^2 | \psi_n \rangle = \\ &= -\frac{1}{2m} \left( \mathcal{E}_n^2 + 2Z \langle 1/r \rangle + Z^2 \langle 1/r^2 \rangle \right) = -\mathcal{E}_n (Z\alpha)^2 \left( \frac{3}{4} - \frac{n}{l + 1/2} \right) \end{aligned}$$

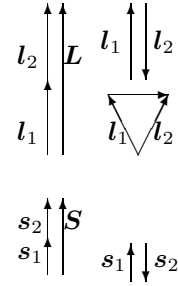
kaj  $\alpha^2 \stackrel{n}{=} 1/137^2$  montras la perturbata aproksimebleco.

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} = \hat{H}_0 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hat{r}}$$



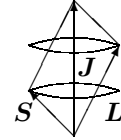
### 9.3 Atoma Vektora Modelo

Laŭ la vektora modelo oni volas priskribi la statojn de la totala angula momanto  $J$  koserinte la sumon de ĉiam angula momanto ĉeestas en la atomo. Oni povas sumi du orbit momantoj angulaj obteninte  $\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 = 0, 1, 2\hbar$  dume pro la angula momantoj de spin  $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 = 0, 1\hbar$  La kvanta numero  $J$  karakteriĝas la subnivalaj multoblaj statoj. La numero de la subnivela multoblo estas la natura numero kiu alportas  $|L - S|$  al  $L + S$  aŭ  $2S + 1$  si  $S$  estas la pli granda.



#### 9.3.1 Parigo

La parigo orbito-spin alportas fenomenon de precesiono ĉar sole  $J$  kaj  $M_J$  estas la unikaj vektoroj fiksj sine magnetik kampo. De  $\hat{H}_{so} = \xi_{LS} \hat{L} \cdot \hat{S} \quad -\partial_\theta \hat{H}_{so} = -\xi \partial_\theta |\hat{L}||\hat{S}| \cos \theta = \xi |\hat{S}||\hat{L}| \sin \theta = \xi \hat{S} \times \hat{L}$  kaj  $\hat{L} \times \hat{L} = \hat{S} \times \hat{S} = 0$  do



$$\hat{L} = \xi \hat{J} \times \hat{L} \quad \hat{S} = \xi \hat{J} \times \hat{S}$$

Pro la parigo spin-spin  $c_{12} \hat{s}_1 \hat{s}_2 = c_{12} (\hat{S}^2 - \hat{s}_1^2 - \hat{s}_2^2)/2 = c_{12} (S(S+1) - 6/4)/2$  Dume por la orbitaj  $b_{12} \hat{l}_1 \hat{l}_2 = c_{12} (\hat{L}^2 - \hat{l}_1^2 - \hat{l}_2^2)/2 = c_{12} (L(L+1) - l_1(l_1+1) - l_2(l_2+1))/2$  Do

$$\xi_{LS} \hat{L} \cdot \hat{S} = \xi_{LS} / 2 (J(J+1) - L(L+1) - S(S+1))$$

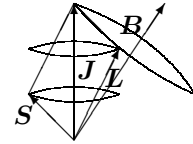
Do la diseco inter su statoj ŝanĝas de la kvanteco

$$\Delta = \xi_{LS} (J+1)$$

nomata |Lande-a Regla de la iIntervalo|.

#### 9.3.2 Sub Magnetika Kampo

Si oni ponas iu magnetika kampo pro la movo de la ŝarĝo la totala angula momanto devas precedi ĉirkaŭe la direkcio de la magnetik kampo. Oni volas do serci la aŭtovaloroj de la magnetik kampo aŭ la akcio de la operatoro  $\hat{\mu}_J \cdot \hat{B}$  kie  $\mu_J$  estas la koresponda dupola momanto de  $J$  prefere  $\hat{\mu}_J = -M_B g \hat{J}$ .  $\hat{\mu}_L = -M_B \hat{L}$   $\mu_S = -2M_S \hat{S}$ .



$$\mu_J = \left( \mu_L \cos(\widehat{L\hat{S}}) + \mu_S \cos(\widehat{L\hat{S}}) \right) \frac{-\mathbf{J}}{J}$$

$\cos(\widehat{L\hat{J}}) = (L(L+1) + J(J+1) - S(S+1)) / (2\sqrt{L(L+1)}\sqrt{J(J+1)})$   $\cos(\widehat{S\hat{J}}) = (S(S+1) + J(J+1) - L(L+1)) / (2\sqrt{S(S+1)}\sqrt{J(J+1)})$  do

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

Kie  $g$  estas la |Land'e Faktoro|.

### 9.4 Interadoj

#### 9.4.1 Elektromagnetika Ondo

$$\frac{e}{m} \mathbf{A}(r, t) \cdot \mathbf{p}$$

$\mathbf{A}$  estas skribebbla kiel:

$$\mathbf{A}(r, t) = A_0(\omega) \frac{\hat{\epsilon}}{2} \left( e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right) \quad \mathbf{p} = -i\hbar \nabla$$

$$\hat{\epsilon} \cdot \mathbf{k} = 0$$

$$A_0^2(\omega) = \frac{2I(\omega)}{\epsilon_0 c \omega^2}$$

Oni povas kalkuli

$$|V_{ba}|^2 = \frac{e\hbar^2}{m^2} |\langle b|e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\hat{\epsilon}\nabla|a\rangle|^2 \frac{A_0^2}{4}$$

Sciante ke  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} = m\dot{\mathbf{r}}/\hbar[H_0, r]$  oni povas esprimi

$$\langle b|\nabla|a\rangle = -\frac{i}{\hbar}\langle b|\hat{\mathbf{p}}|a\rangle = -\frac{m}{\hbar^2}\langle b|H_0r - rH_0|a\rangle = -\frac{m}{\hbar^2}\langle b|\mathcal{E}_br - r\mathcal{E}_a|a\rangle = \frac{m\omega_{ba}}{\hbar e}\langle b|\hat{D}|a\rangle$$

$\hat{D}$  dipola momanto

kie

$$\omega_{ab} := \frac{\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b}{\hbar} \quad \hat{D} := -er$$

La grandeco de tiuj koeficientoj estas

$$w_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \left(\frac{e\hbar}{m} \frac{A_0}{2}\right)^2 |\langle b|e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\hat{\epsilon}\nabla|a\rangle|^2 \delta(\omega_{ba} - \omega)$$

$M_{ba}^* = \langle b|e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\hat{\epsilon}\nabla|a\rangle = -M_{ab}$  do  $w_{ab} = w_{ba}$ . La pasaji inter la ŝtato  $a \rightarrow b$  estas nomata **Radiado de Elmito Stimulita** tiam la pasaji de la ŝtato  $a$  al la  $b$  per la radiado estas la **Probableco de Adsorbo**. Se la lumo estas polarigita la koeficiento havas termon  $\cos^2(\widehat{\epsilon\mathbf{A}})$  [altimenti]  $1/3$  per ĉiu direkcio.

La **Koeficiento de Elmito Nature** estas

$$w_{ba}^{nat} = \frac{32\pi^3\nu_{ab}^3}{3c^3\hbar} |M_{ba}|^2$$

Tiuj tri koeficientoj estas la **Einstein-a Koeficiento**-j

Pluen, oni povas difini la **Urta Sekcio de Adsorbo**

$$S_{ba} = \frac{w_{ba}}{n(\omega)c} = \frac{w_{ba}}{I(\omega)}\hbar\omega = \frac{4\pi^2}{m^2c} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\omega} |M_{ba}|^2 \delta(\omega_{ba} - \omega)$$

Nun oni povas solvi tia ekvacio kun diversaj proksimaj gradoj.

### Dupola Proksimaĵo

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \sum_n \frac{(i\mathbf{k}\mathbf{r})^n}{n!}$$

$$\mathcal{E}_0 = \frac{e\hbar}{m} \frac{A_0}{2}$$

haltigante al la unua korektado  $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \stackrel{\text{dup}}{\approx} 1$  oni devas kalkuli  $\langle b|\hat{\epsilon}\hat{D}|a\rangle$  por obteni

$$w_{12} = \frac{\pi}{2\hbar^2} (\mathcal{E}_0 \langle f| - e\mathbf{r}|l\rangle)^2 \delta(\omega_{21} - \omega)$$

Nun oni volas kalkuli la matrica elemento de la elektrik dipolo kaj trovi la **Reglo Selekcia Dupola**. Laŭ la radia termo la integralo donas

$$\langle m|\sum_l q_l r_l|n\rangle = \int \psi_m^* \sum_l q_l r_l \psi_n dV \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta n \neq 0$$

Oni devas kalkuli la angulajn termojn

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{l_2}^{*m_2} \begin{matrix} \sin\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\theta \end{matrix} Y_{l_1}^{m_1} d\cos\theta d\phi$$

aŭ

$$\langle l_2 m_2 | \frac{x}{r} | l_1 m_1 \rangle = \langle l_2, m_2 | \sin\theta | l_1 m_1 \rangle \langle m_2 | \cos\phi | m_1 \rangle = \delta_{l_2, l_1 \pm 1} \delta_{m_2, m_1 \pm 1}$$

$$\langle l_2 m_2 | \frac{y}{r} | l_1 m_1 \rangle = \delta_{l_2, l_1 \pm 1} \delta_{m_2, m_1 \pm 1}$$

$$\langle l_2 m_2 | \frac{z}{r} | l_1 m_1 \rangle = \delta_{l_2, l_1 \pm 1} \delta_{m_2, m_1}$$

de kiuj la regla selekcio  $\Delta l = \pm 1 \quad \Delta m = 0, \pm 1$ .

## Kvarpola Proksimaĵo

$$H'_{rad} = \frac{\hbar e}{mc} \nabla \mathbf{A}_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$$

Estas solvebla kun la komponantoj de ia tensoro kiu havas termojn de la angula momanto ( $-i\hbar(x_i\partial_{x_j} - x_j\partial_{x_i})$ ) kaj duplaj valoroj ( $-ex_ix_i$ ). La unuaj termoj estas similaĵoj al tiuj de la interado kun la magnetik kampo priskribita per la hamiltona termo  $H_{mag} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$  kaj donas la selekciajn reglon havebla por la uzo de la operatoroj  $L_x$ ,  $L_y$  kaj  $L_z$  sur la ond funkcio de la hidroĝena atomo ( $\Delta l = 0, \Delta m = 0, \pm 1$ ). La efekto estas de la ordo de

$$\frac{eE\langle f|r|i\rangle}{\frac{eB}{2mc}\langle f|L|i\rangle} = \frac{a_0E}{\frac{\hbar}{mc}B} \stackrel{n}{=} 0.5 \cdot 10^{-6}$$

La duaj estas ekspimeblaj per la Hamilton-a termo  $H = 1/2\nabla\mathbf{E}$  kiu havas termon  $e\mathbf{r}\mathbf{r}$ . Notante ke la operatoro de kvarpola estas para sub inversio de la koordinatoj oni povas obteni la aliajn reglojn de selekcio ( $\Delta l = 0, \pm 2$  kaj  $\Delta m = 0, \pm 1, \pm 2$ ). La ordo de tiu interado estas kvantigebla en

$$\frac{eE\langle f|r|i\rangle}{2\pi/\lambda E e\langle f|rr|i\rangle} \simeq \frac{\lambda}{a_0} \frac{1}{2\pi} \stackrel{n}{=} 10^{-7} \text{pro } \lambda \stackrel{n}{=} 500[\text{nm}]$$

La magnetik dupola aŭ elektik kvarpola estas pli favorita en la ionigitaj atomoj ĉar estas frekvenca vidi tiujn transirojn en la nebuloj kaj en la [aurora boreale].

## Largeco Riga

### 9.4.2 Magnetika Interado

### 9.4.3 Interado kun Libera Partiklo

# Capitolo 10

## Stato Solida

La stato solida priskribas sistemojn de atomoj interagantaj per *ligoj* kiuj posicioj estas preskaŭ fiksaj en punktoj de la *retiklo*. Gravus la [comportamento] de la sistemo kun eksteraj interadoj kiel elektr magnetika radiado aŭ siaj proprecoj (specifika kaloro, termika kondukebleco, modulo de komprimado ktp) al variado de la temperaturo.

### 10.1 Ligoj

### 10.2 Retiklo

La retiklo estas la geometrika posicinado de la atomoj en la solido por la bilancado de la interadoj. La **Bravais-a Retiklo** estas [griglia] senfina de punktoj diskretaj ponitaj en la spacoj tiu ke la sistemado kaj la orientado samu en iu ajn punkto de la [griglia]. Oni povas elekti por ĉia retiklo la bazaĵn vektorojn tiu ke oni povas [raggiungere] ĉiun punkton de la retiklo per la elekto de tri interaj numeroj  $n_1, n_2, n_3$

$$\mathbf{r}_n = n_1 \mathbf{r}^1 + n_2 \mathbf{r}^2 + n_3 \mathbf{r}^3$$

Sekvinte la grupa teoria oni povas kalkuli ke la numero de Bravaisaj retikloj estas 14. La pli uzitaj estas la *SC* (simpla kuba) (por simplaj kalkuloj ĉar ne estas tre uzita nature), la *BCC* (kuba kun atomo en la centro) kaj *FCC* (kuba kun atomoj en la centro de la [facce]). La aliaj havas formon ne kuba ĉar povas havi ne egal latojn aŭ angulojn.

a retiklo *SC* havas bazon  $\mathbf{r}^1 = a(1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{r}^2 = a(0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{r}^3 = a(0, 0, 1)$  kie  $a$  estas la baza longeco de la retiklo.

Laŭ *BCC*  $\mathbf{r}^1 = a/2(-1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{r}^2 = a/2(1, -1, 1)$ ,  $\mathbf{r}^3 = a/2(1, 1, -1)$

Laŭ *FCC*  $\mathbf{r}^1 = a/2(0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{r}^2 = a/2(1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{r}^3 = a/2(1, 1, 0)$ . La ecoj de tiuj retikloj estas

	$V$	punktoj	$n$ proksimoj	$r$ proksimoj	[impaccamento]
SC	$a^3$	1	6	$a$	$\pi/a$
BCC	$a^3/2$	2	8	$\sqrt{2}a$	$\sqrt{3}/8\pi$
FCC	$a^3/4$	4	12	$\sqrt{2}a/2$	

△

Oni volas entroduki bazon tiu ke

$$\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{k}_j = 2\pi\delta_j^i$$

Tiu bazon estas do formata de la vektoroj

$$k_1 = \frac{2\pi r^1}{r^1 \cdot r^2 \times r^3} \quad k_2 = \frac{2\pi r^2}{r^1 \cdot r^2 \times r^3} \quad k_3 = \frac{2\pi r^3}{r^1 \cdot r^2 \times r^3}$$

### 10.3 Fononoj

La atomoj de la retikloj, per eksteraj ondoj aŭ per efekto de la temperaturo, povas movi de siaj retikl pozicioj. Si oni imaginas potencialon kun repulsio de dura sfero al la atoma radio, minimo al la ekvilibra punkto  $x^0$  kaj nuligante al la kresko de la radio oni povas proksimiĝi la potencialon en harmonika proksimado disvolvinte fine la dua termo en potencoj de  $\Delta x$ , movo rilate la pozicio  $x^0$

$$V(\mathbf{x}_{n\alpha i}) = V(\mathbf{x}_{n\alpha i}^0) + \sum_{n\alpha i} \partial_{\mathbf{x}_{n\alpha i}} V(\mathbf{x})|_{\Delta x=0} \Delta x_{n\alpha i} + \frac{1}{2} \sum_{n\alpha i} \sum_{m\beta j} \frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial x_{n\alpha i} \partial x_{m\beta j}} V(\mathbf{x})|_{\Delta x=0} \Delta x_{n\alpha i} \Delta x_{m\beta j} + O(\Delta x)^3$$

Oni sumas sur ĉiuj  $n$  ĉeloj de la retiklo en la  $\alpha$  numeroj de bazoj (tipoj de atomoj en la ĉelo) per  $i$  direktoj. La unua derivaĵo de la potencialo nuligās en la minimumo dume la valoro de nula ordo estas ne interesa kalkulinte la ekvacio de la movo. Do nia Hamiltona estas

$$H = \sum_{n\alpha i} \frac{p_{n\alpha i}^2}{2m_\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{n\alpha i} \sum_{m\beta j} V_{n\alpha i}^{m\beta j} \Delta x_{n\alpha i} \Delta x_{m\beta j} \quad V_{n\alpha i}^{m\beta j} := \frac{\partial^2 V}{\partial x_{n\alpha i} \partial x_{m\beta j}}$$

Nun la problemo similas al aro de atomoj unigitas per [molle] kun diversaj masoj. La problemo estas la bone konita problemo de la harmonika oscilatoro kies solvado estas la ekvacio de la ondoj

$$\Delta x_{n\alpha i} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{u_{\alpha i}(\mathbf{k})}{\sqrt{m_\alpha}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{-i\omega t}$$

Kun la kondico de Born-Von Karman  $\Delta x_N = \Delta x_0$  (aŭ  $\psi(x+L) = \psi(x)$ ) oni povas facile vidi ke ankŭ la ond vektoroj estas kvantigitaj

$$\Delta x_N - \Delta x_0 = 0 \quad \sum_{\mathbf{k}} \frac{u_{\alpha}(\mathbf{k})}{\sqrt{m_\alpha}} (1 - e^{i\mathbf{k}N\mathbf{a}}) = 0 \quad \mathbf{k} = \frac{2\pi}{N\mathbf{a}} m$$

### 10.4 Dielektrika Solido

La Maxwellaj ekvacioj de solido ponita sub elektra (eksterne  $\mathbf{E}$  interne  $\mathbf{D}$ ) kaj magnetika  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{H}$  ene la solido) depenas de la ŝarĝa distribuo  $\rho(\mathbf{r})$  kaj de la tempa variacio de la kampoj

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\nabla \mathbf{D} = \rho \quad \nabla \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_T \mathbf{B} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{H} + \partial_T \mathbf{D}$$

en lineara proksimaĵo en la frekvenco dominio  $\partial_t \rightarrow \omega$

$$\nabla \mathbf{H}(\omega) = \mathbf{J}(\omega) - i\omega \mathbf{D}(\omega) = \sigma(\omega) \mathbf{E}(\omega) - i\omega \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \mathbf{E}(\omega) = -i\omega \epsilon_0 \left( \epsilon_r(\omega) + i \frac{\sigma(\omega)}{\epsilon_0 \omega} \right) \mathbf{E}(\omega)$$

la [susceptivita] elektra  $\chi(\omega) ::= \epsilon_r(\omega) - 1$  estas analitika funkcio kaj oni povas disvolvi ĝin. Sia poloj estas sur la nea kompleksa mez plano. Si oni kalkula la cirkla integralo sur la plusa mez plano ĝi nuligās.

...

Si oni ne havas liberan ŝanrĝojn  $\rho = 0$  oni havas en la solido ĉi tiu oscilanta kampo.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \partial_t \nabla \times \mathbf{H} = -\mu \sigma \partial_t \mathbf{E} - \mu \epsilon \partial_t^2 \mathbf{E} \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon \partial_t^2 \mathbf{E} + \mu \sigma \partial_t \mathbf{E}$$

tiu ekvacio priskribas periodikan ondon  $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t))$  kiu havas solvason sur la spaca dominio  $\nabla^2 \mathbf{E} = c\mathbf{E} = -\mu \epsilon \omega^2 \mathbf{E} - i\mu \sigma \omega \mathbf{E}$  kaj sur la tempa dominio

$\mu\epsilon\ddot{\mathbf{E}} + \mu\sigma\dot{\mathbf{E}} = c\mathbf{E} = -k^2\mathbf{E}$  kaj devas solvi la kondico  $(-k^2 + \omega^2\mu\epsilon + i\omega\sigma)\mathbf{E} = 0$ . havas solvadojn de la formo

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{E}_0 e^{i(\Re(k)z - \omega t)} e^{-\Im(k)z} \quad k := \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon + i\frac{\sigma}{\omega}} \quad n(\omega) := \frac{\omega}{c} k(\omega)$$

Notite ke la intenso  $I$  havas amplitudo proporcionala al la kvar modulo de la kampo  $\propto |\mathbf{E}|^2$  nur la reala esponento kontribuas al la atenuado de la intesaĵo  $E_0^2 \exp(-\Im k)z$ . Oni do povas kalkuli la **Refleksado Koeficanto** kaj la **Trasmesado koeficanto**

$$R(\omega) = \frac{(\Re n(\omega) - 1)^2 + \Im^2 n(\omega)}{(\Re n(\omega) + 1)^2 + \Im^2 n(\omega)}$$

La polarizaĵo  $\mathbf{P}(\omega) := \frac{N}{V} \alpha(\omega) \epsilon_0 \mathbf{E}(\omega)$  estas akirebla per la kalkulo de la polarizeco  $\alpha(\omega)$  kiu dividiĝas en atomika kaj retikla

$$\alpha(\omega) = \alpha^{at}(\omega) + \alpha^{ret}(\omega) = \frac{V}{N} (\epsilon_r(\omega) - 1)$$

La kalkulo estas kondukebla al ekvacio kiu priskribas la movo de la elektronika ŝarĝo pro ekstera forco.

$$\mathbf{d}^{at} := -Ze\mathbf{s}(t) \quad Zm\ddot{\mathbf{s}} = -Zm\omega_0\mathbf{s} - Ze\mathbf{E}$$

kiu en la frekvenco dominio montriĝas

$$\mathbf{s}_0(\omega) = -\frac{e\mathbf{E}}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \quad \mathbf{P}^{at} = \frac{\mathbf{d}^{at}}{V} = \frac{Ze^2\mathbf{E}_0}{Vm(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

kiu ofte etas konsiderata frekvenc ne dependa (se la frekvenco estas tre alta la polarizaĵo ne ŝanĝas direcion kun la ekstera kampo). La retiklo moviĝas anstataŭe per la ekvacio

$$\mu\ddot{\mathbf{s}} = -\mu\omega_0^2\mathbf{s} + e^*\mathbf{E} - \gamma\mu\dot{\mathbf{s}} \quad \hat{\mathbf{s}}(\omega) = \frac{e^*\mathbf{E}}{\mu(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega\mu}$$

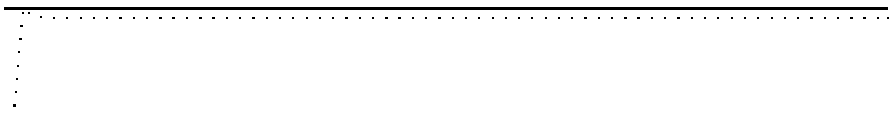
Oni povas, uzante la proksimaĵo per  $\gamma \rightarrow 0$ , reskribi

$$\begin{aligned} \alpha^{ret}(\omega) &= \frac{e^{*2}}{\mu\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \rightarrow ce^{*2} P_P\left(\frac{1}{\omega_0 - \omega^2}\right) + i\pi\delta(\omega_0^2 - \omega^2) = \\ &= ce^{*2} P_P\left(\frac{1}{\omega_0 - \omega^2}\right) + i\pi\frac{1}{2\omega_0}(\delta(\omega_0 - \omega) + \delta(\omega_0 + \omega)) \end{aligned}$$

definite la limitoj  $\epsilon(\omega) \rightarrow_{\omega \rightarrow \infty} \epsilon_\infty$  kaj  $\epsilon(\omega) \rightarrow_{\omega \rightarrow 0} \epsilon_0$

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_r^\infty + \frac{\omega_0^2(\epsilon_r^0 - \epsilon_r^\infty)}{\omega_0^2 - \omega^2} + i\frac{\pi}{2}\omega_0(\epsilon_r^0)(\delta(\omega_0 - \omega) + \delta(\omega_0 + \omega))$$

Oni do havas du termoj, la reala



## 10.5 Movaj Elektronoj

Komence, oni volas priskribi metalon kiel potenciala kavo de liberaj elektronoj. Tiu sistemo sekvas la Fermi-a statistiko kaj estas nomata *jellium model* aŭ **Fermi-a Gaso**. Oni uzas la Hartree-a proksimaĵo de nedipenda elektronoj  $\Psi(\mathbf{r}) = \prod_i \psi_i(\mathbf{r}_i)$ . La energia niveloj estas bone konitaj per la valoroj  $\mathcal{E}_{\mathbf{n}} = \hbar^2/2m \cdot (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \hbar^2/2m \cdot \pi^2/L^2 \cdot (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$ . La nedependaj ondaj vektoroj  $\mathbf{k}$  estas en la unua [ottante]. La totala numero de elektronoj  $N$  kaj la denseco  $u$  estas kalkulebla per

$$N := \int d\mathbf{k} f(\mathcal{E}(\mathbf{k})) = \int d\mathcal{E} g(\mathcal{E}) f(\mathcal{E}) \quad u = \frac{u}{V} = \int d\mathcal{E} g(\mathcal{E}) f(\mathcal{E}) \mathcal{E}$$

kie  $g(\mathcal{E})$  estas la denseco de la statoj kaj  $f(\mathcal{E})$  la statistika distribuo de la partikloj. La denseco de la statoj estas skribebila kiel prefaktoro de la ŝanĝo de la integrala variabla se oni dividas la ond vektoron  $\mathbf{k}$  en la partoj perpendikulara  $k_{\perp}$  kaj tanĝa  $f_{\mathcal{E}}$  al la Fermi-a surfaco  $\mathcal{E}(\mathbf{k}) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}$

$$d\mathcal{E} = |\nabla_{\mathbf{k}} \mathcal{E}| dk_{\perp}$$

$$\int d\mathbf{k} = \int \int_{\mathcal{E}(\mathbf{k})=c} \frac{df_{\mathcal{E}}}{|\nabla_{\mathbf{k}} \mathcal{E}(\mathbf{k})|} d\mathcal{E} = \int g(\mathcal{E}) d\mathcal{E}$$

En grandaj sistemoj  $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow V/(2\pi)^2 \int d\mathbf{k}$

$$k = \sqrt{2m\mathcal{E}/\hbar^2} \\ dk = \sqrt{2m/\hbar^2} \frac{1}{2} \mathcal{E}^{-1/2} d\mathcal{E}$$

$$\sum_{\mathbf{k}} f(\mathcal{E}(\mathbf{k})) \rightarrow V \int d\mathcal{E} g(\mathcal{E}) f(\mathcal{E}) \quad g(\mathcal{E}) = 2 \cdot \frac{4\pi k^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{\mathcal{E}}$$

kie la faktoro 2 estas devita a la multpleco de la elektrona *spin*. En la modelo de nedependaj elektronoj

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}) = \mathcal{E}(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad m^*(k) := \hbar^2 / \partial_k^2 \mathcal{E}(k)$$

oni difinas  $m$  la **[Maso [Efficace]]**-n de la partiklo devita al la valoro de la  $\mathbf{k}$ . La efikaca maso estas grava por kompreni la [ruolo] de la elektrono en la transporto de varmo aŭ kuranto. Si la efikaca maso estas malgranda la kurvado de la funkcio  $\mathcal{E}(\mathbf{k})$  estas granda kaj forte depenas de  $\mathbf{k}$  kaj la elektrono estas bona kondukilo.

De la antaŭa formulo konante la totala numero de la elektronoj  $N$  oni povas trovi la Fermi-a nivelo

$$N = \frac{V}{8\pi^2} \frac{4}{3} \pi k_{\mathcal{F}}^3 \cdot 2 \quad \mathcal{E}_{\mathcal{F}} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

Oni povas do kalkuli la energia denseco

$$u = \int_0^{\infty} d\mathcal{E} g(\mathcal{E}) f(\mathcal{E}) \mathcal{E} = \int_0^{\mathcal{E}_{\mathcal{F}}} d\mathcal{E} g(\mathcal{E}) \mathcal{E} = \frac{3}{5} \frac{N}{V} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}$$

$$f(\mathcal{E}, \mathcal{T}) = \frac{1}{e^{\beta(\mathcal{E}-\mu)} + 1}$$

$$\beta = \frac{1}{\mathcal{T}} \quad \mu = \partial_N \mathcal{A}$$

$$f(\mathcal{E}) \simeq e^{-\beta(\mathcal{E}-\mu)}$$

Kiel supren skribita la Fermi distribuo dependas de la temperaturo  $\mathcal{T}$  de la sistemo do la elektronoj havas probablecon havi energion pli granda ol la Fermi-a ankaŭ se je la ambienta temperaturo  $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} \stackrel{n}{=} 10^4 [K]$  dume  $\mathcal{T} \stackrel{n}{=} 10^2 [K]$ . Se la energio estas granda la distribuo estas egala al la Boltzmann-a. Ĝenere la kimika potencialon dependas de la temperaturo kaj de la totala numero de elektronoj

$$\mu = \mu(\mathcal{T}, N) = \mu(\mathcal{T}_0) - c \left( \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}_{\mathcal{F}}} \right)^2 + O(\mathcal{T}^2) \simeq \mathcal{E}_{\mathcal{F}}$$

En tiu elektrona libera modelo si oni enmetas en la solido ŝar  $v$  gon  $q$  plusan oni havas potencialon eksteran en la elektronan gason kaj oni devas solvi la Poisson Ekvacion.

$$\nabla^2 \mathcal{V}(\mathbf{r}) = -4\pi \rho(\mathbf{r}) = -4\pi (-e(\mathbf{n}(\mathbf{r}) - \mathbf{n}_0))$$

En la [Thomas Fermi-a Proksimaĵo] la ekstera potencialo varigas malrapide kaj ŝanĝas sole la energio de la sigla partiklo kaj la Fermi-a distribuo  $\mathcal{E}(\mathbf{k}) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbf{k}) - e\mathcal{V}(\mathbf{r})$   
 $\mu \rightarrow \mu(\mathbf{r}) = \mu + e\mathcal{V}(\mathbf{r}) \simeq \mathcal{E}_{\mathcal{F}} + e\mathcal{V}(\mathbf{r}) \quad \hbar^2/2m \cdot (3\pi^2 \mathbf{n}(\mathbf{r})) \simeq \mathcal{E}_{\mathcal{F}} + e\mathcal{V}$  kun klasika elektrostatika termo  $e\mathcal{V}(\mathbf{r})$ .

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \frac{1}{3\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} (\mathcal{E}_{\mathcal{F}} + e\mathcal{V}(\mathbf{r}))^{3/2} \simeq \frac{1}{3\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{3/2} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{e\phi(\mathbf{r})}{\mathcal{E}_{\mathcal{F}}} \right)$$

$\nabla^2 \mathcal{V}(r) = \left( \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r \right) \mathcal{V}(r) =$  Sekvinte la Poisson-a ekvacio kaj poninte la sferika simetrio  $\mathcal{V}(\mathbf{r}) = \mathcal{V}(r)$  oni povas difini  $r_{\mathcal{T}\mathcal{F}}$  la **Thomas Fermi-a Radio** aŭ la distanco de defalo de la potencialo ene libera Fermi-a gaso

$$\lambda^2 \mathcal{V}(r) = \frac{q}{r} e^{-\lambda r}$$

$$r_{\mathcal{T}\mathcal{F}} := \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{F}}}{6\pi n_0 e^2}} \quad \mathcal{V}(r) = \frac{q}{r} e^{-\frac{r}{r_{\mathcal{T}\mathcal{F}}}}$$

Tiu radio estas malgranda en la metaloj, kiuj ne povas havi separon de la ŝarĝoj, kaj granda en la [isolanti] ĉar la elektronoj estas ligitaj kaj ne sukcesas [schirmare] la liberan ŝarĝon. Kelkaj materialoj povas havi la **Mott-a Transiro** transigante de metaloj al [isolanti] ŝanĝante la valoro de la Thomas Fermi radio.

Si oni varmigas la materialon la elektronoj eliras de la sistemon kun la kuranto

$$\mathbf{J} = -env \quad J_x \simeq \frac{2e}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y dk_z \int_{k_{min} | \mathcal{E}(\mathbf{k}) > \mathcal{V}_{ekst} + \mathcal{E}_{\mathcal{F}}} dk_x f(\mathcal{E}(\mathbf{k}), \mathcal{T}) \frac{\hbar}{m} k_x$$

kie  $\mathcal{V}_{ekst}$  estas la potencialo de ekstrado de la elektrono.

Kalkulinte...

oni obtenas la **Richardson Dushman-a Legxo**

$$J_x \simeq \left( \frac{4\pi m e}{\hbar^3} \right) (k_B \mathcal{T})^2 e^{-\frac{\mathcal{V}_{ekst}}{k_B \mathcal{T}}}$$



## 10.6 Bandaj Strukturoj

La pli bona priskribo de la elektronoj en periodika retiklo estas donita de

Th: Bloch-a Teoremo

Si oni havas periodikan potencialon la ond funkcioj kiuj solvas la Schrödinger-a ekvacio estas planaj ondoj modulita por periodikaj funkcioj. La potencialo estas

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \mathcal{V}(\mathbf{r})\right) \psi(\mathbf{r}) = \mathcal{E} \psi(\mathbf{r}) \quad | \quad \mathcal{V}(\mathbf{r}) = \mathcal{V}(\mathbf{r} + \mathbf{R})$$

Si  $\mathbf{R} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3$  estas la retikla paso oni povas skribi la ond funkcio kiel

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad | \quad \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad | \quad \Psi(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$$

Oni volas serci funkcion de formo kiel supre kiu solvas la ekvacio al memvaloroj. La ond funkcio en la reciproka spaco estas kalkulita per sia Fourier-a transformo  $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  kun  $c_{\mathbf{k}} \propto \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r})$ . Pro la periodikaj kondicioj la potencialo samas en ĉiuj punktoj  $\mathbf{r} + n\mathbf{R}$  de la retiklo.

$$\mathcal{V}(\mathbf{r}) = \mathcal{V}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{K}} \mathcal{V}_{\mathbf{K}} e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}}$$

La kalkulo en la reciproka spaco estas pli facila

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar k^2}{2m} c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{K}} \mathcal{V}_{\mathbf{K}} c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \mathcal{E} \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

La koeficiento  $c_{\mathbf{k}}$  estas multiplikita per la faza faktoro  $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  do

$$c_{\mathbf{k}} \propto \sum_{\mathbf{k}'} \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} = \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \quad \sum_{\mathbf{k}'} \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{K}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{K}} c_{\mathbf{k}-\mathbf{G}}$$

La ekvacio al la memvaloroj kundikiĝitas al

$$\left(\frac{\hbar k^2}{2m} - \mathcal{E}\right) c_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{K}} \mathcal{V}_{\mathbf{K}} c_{\mathbf{K}-\mathbf{k}} = 0$$

La solucio samas tiel per iu ajn vektoro  $\mathbf{K}$  de la regulara strukturo de la retiklo.  $\square$

Per tiu teoremo oni povas diri ke en ia unua Brillouin-a zono  $\mathbf{k} \in [-\pi/a, \pi/a]$  estas egala en ĉiuj.

### Preskaŭ liberaj

La unua proksimaĵo konsideras la elektronojn kiel preskaŭ liberajn. Oni devas do solvi  $\mathcal{E}_0(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  la samvaloraĵn ekvaciojn al la memvalorojn

$$\begin{aligned} (\mathcal{E} - \mathcal{E}_0(\mathbf{k})) c_{\mathbf{k}} &= \sum_{\mathbf{G}} \mathcal{V}_{\mathbf{G}} c_{\mathbf{k}-\mathbf{G}} \\ (\mathcal{E} - \mathcal{E}_0(\mathbf{k} - \mathbf{G})) c_{\mathbf{k}-\mathbf{G}} &= \sum_{\mathbf{G}'} \mathcal{V}_{\mathbf{G}'} c_{\mathbf{k}-\mathbf{G}-\mathbf{G}'} = \sum_{\mathbf{G}''-\mathbf{G}} c_{\mathbf{k}-\mathbf{G}''} \end{aligned}$$

En la ipoteso de malgranda potencialo nur la koeficientoj kiuj havas memenergio simila al la kinetika energio estas gravaj

$$c_{\mathbf{k}-\mathbf{G}} = \frac{\sum_{\mathbf{G}'} \mathcal{V}_{\mathbf{G}'} c_{\mathbf{k}-\mathbf{G}-\mathbf{G}'}}{\mathcal{E} - \mathcal{E}_0(\mathbf{k} - \mathbf{G})} \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0(\mathbf{k} - \mathbf{G}) \Rightarrow k^2 \simeq |\mathbf{k} - \mathbf{G}|^2$$

prefere nur la elektronoj kiuj plitenas la Bragg kondico  $k^2 \simeq |\mathbf{G} - \mathbf{k}|^2$  malgrandigas la denominatoron kaj ŝanĝas la energiajn nivelojn [vicino] al la bordoj de la unua Brillouin zono. Oni do devas solvi amaux ekvacioj

$$\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mathcal{E}\right)c_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{G}} V_{\mathbf{G}} c_{\mathbf{k}-\mathbf{G}} \quad \left(\frac{\hbar^2 |\mathbf{k} - \mathbf{G}|^2}{2m} - \mathcal{E}\right)c_{\mathbf{k}-\mathbf{G}} - V_{-\mathbf{G}} c_{\mathbf{k}} = 0$$

Estante sistemo de du ekvacioj estas solvebla se la determinato estas ne nula. Tiu kondico portas al la rezulto

$$\mathcal{E}^{\pm} = \frac{\mathcal{E}_0(\mathbf{k}) + \mathcal{E}_0(\mathbf{k} - \mathbf{G})}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\mathcal{E}_0(\mathbf{k} - \mathbf{G}) - \mathcal{E}_0(\mathbf{k}))^2 + |V_{\mathbf{G}}|^2}$$

prefere oni havas du diversaj valoroj kiuj permetas la ekziston de la partiklo nur en kelkaj bandoj dume aliaj bandoj estas [proibite]. En unu dimensio la ond funkcio estas la [super pono] de eniranta kaj refleksa ondo. La denseco de la statoj estas  $\rho_+(x) = |\psi_+(\mathbf{x})|^2 \simeq \cos^2(\pi/\mathbf{a}\mathbf{x})$ . Tiu modelo estas utila per la metaloj de la I, II, III, IV periodo ĉar la elektronoj de la ŝeloj  $s, p$  estas malmulta kunigitaj kun la iono.

## Forta Ligo

Por la elektronoj kiuj estas forte ligitaj al la iono ( la metaloj de transiro kiuj ne havas la  $d$  ŝelo plene okupita kaj la [isolanti]). Kiel en la Materio Struktura oni povas priskribi molekulon kiel lineara [superposado] de atoma orbitaloj sed kun la periodika kondico de la teoremo di Bloch. La ekvacio kiu oni devas solvi estas tia de la izolita atomoj kun la interado de la aliaj en la [cella].

$$\mathcal{E}\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = H\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \mathcal{V}_{at}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) + \sum_{m \neq n} \mathcal{V}_{at}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m)\right)\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$$

Pluen la ond funkcio devas havi la Bloch-a formon kaj estas [sovrapposizione] de atoma ond funkcioj

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_n e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_n} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) = \sum_n e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_n} \sum_i a_i \phi_i^{at}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)$$

Kalkulante  $\langle \phi_j | H - \mathcal{E} | \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \rangle = 0$  kaj definante

$$S_{ij}(\mathbf{r}_n) := \int d\mathbf{r} \phi_j^*(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) (1 - \delta_{n,0}) \quad \mathcal{V}_{ij} = \int d\mathbf{r} \phi_j^*(\mathbf{r}) \left( \sum_{m \neq n} V_A(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \right) \phi_i(\mathbf{r})$$

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{r}_n) := \int d\mathbf{r} \phi_j^*(\mathbf{r}) \left( \sum_{m \neq n} V_A(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \right) \phi_i(\mathbf{r}) (1 - \delta_{n,0})$$

oni obtenus

$$\mathcal{E}_l(1 + S(\mathbf{k})) + \mathcal{V}_{ll} + \Gamma(\mathbf{k}) = \mathcal{E}(1 + S(\mathbf{k})) \quad \mathcal{E}(\mathbf{k}) = \mathcal{E}_l + \frac{\mathcal{V}_{ll} + \Gamma(\mathbf{k})}{1 + S(\mathbf{k})} \simeq \mathcal{E}_l + \mathcal{V}_{ll} + \Gamma(\mathbf{k})$$

Banda Strukturo en SC retiklo

En la  $SC$  retiklo oni havas nur interadoj kun 8 [nearest neighbours]. La kalkulo de

$$\Gamma(\mathbf{k}) = \sum_{n \neq 0} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \int d\mathbf{r} \phi^*(\mathbf{r}) \left( \sum_{\langle mn \rangle} V_A(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \right) \phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) = \sum_{n \neq 0} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \gamma$$

$$= 2\gamma(\cos(k_x a) + \cos(k_y a) + \cos(k_z a))$$

Rilate al la energio  $\mathcal{E}_l$  de la atoma nivelo  $l$  oni povas havi valorojn

$$\mathcal{E} \stackrel{S_{ll} \simeq 0}{\simeq} \mathcal{E}_l + \frac{?}{0} + 2\gamma \left( \cos\left(2\frac{k_x a}{2}\right) + 1 - 2\sin^2\left(\frac{k_y a}{2}\right) \stackrel{k \simeq 0}{\simeq} 1 - \frac{k_x^2 a^2}{2} \right) = \mathcal{E}_l + 6\gamma - \gamma a^2 k^2$$

△

## 10.7 Kuranto

Dume oni povas konsideri la eksternajn kampojn klasike kiam ili ne variĝas en la atomaj dimensioj kaj sia frekvenco ne estas komparebla kun la energio de inizaĝo aŭ de banda transiro, oni devas konsideri la elektronoj kiel kvantumaj partikloj. La elektrono estas onda paketo kiu havas grupan rapidecon  $\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}}\omega$  kaj en la Bloch-a priskribo en la  $n$ -a bando oni havas

$$\mathbf{v}_n = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_n(\mathbf{k})$$

kiu montras ke se la funkcio  $\mathcal{E}(\mathbf{k})$  ne estas kostanta la rapideco neniam nuligas  $\mathbf{v}_g \propto \nabla_{\mathbf{k}} \mathcal{E} \neq 0$  do sub kostanta forco  $m d_t \mathbf{v} = e \mathbf{E}$  la rapideco kreskas kun la tempo  $v = eEt/m$  kaj la kondukebleco estas senfina. Tiu kiu limitas la kondukebleco de la kuranto estas la fotonoj kaj la difektoj de la retiklo kiuj interagigas kun la elektronoj. Oni volas do formi priskribon kiu konsideru la [modifiko] de la elektrona distribuo per kostanta forco kaj la interado kun la defektoj de la retiklo. La kuranto estas do

$$\mathbf{J}_n = 2 \int_{I_{\text{B}aZ_0}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} (-e) \mathbf{v}_n(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) = -\frac{2e}{\hbar(2\pi^3)} \int_{I_{\text{B}aZ_0}} d\mathbf{k} \nabla_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_n(\mathbf{k}) f(\mathbf{k})$$

Si la bando estas plene okupita la funkcio  $\mathcal{E}(\mathbf{k})$  estas para, sia derivaĵo estas do nepara kaj nuligas l'integralon sur la periodika intervalo. Nur la bandoj ne plene okupitaj povas transporti kuranto do si la bando estas preskaŭ malplena oni diras ke la kondukeco estas devita ol la nea ŝarĵoj (kiel elektronoj sed kun diversa efika maso) se estas preskaŭ plena estas la [buche] de plusa signo transporti kuranton. Per la **Boltzmann-a Ekvacio**

$$f = f(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{t}) | \partial_t f + \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{r}} f + \frac{\mathbf{F}}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} f = \left( \partial_t f \right)_{kol}$$

la maldekstra termo esta la koliza aŭ la probableco ke la elektrono, kolidante kun alia partiklo, ŝanās staton.

$$\mathcal{P}_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'} = \int \frac{d\mathbf{k}'}{4\pi^3} W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} f(\mathbf{k})(1 - f(\mathbf{k}')) \quad \left( \partial_t f \right)_{kol} = \mathcal{P}_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'} - \mathcal{P}_{\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k}}$$

$W_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'} := \partial_t \mathcal{P}_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'}$  estas la probablo de transiro sur tempa uneco inter la statoj  $|k\rangle, |k'\rangle$  kiel priskribita en la Fermi aurea leĝo. Tiu estas tre dificila integrala diferencala kalkulo, ofte neebla ĉar oni ne konas la Hamilton-a de la interado inter la du partikloj. Oni uzos do la **Tempa Rilassamento Proksimaĵo** kiu diras ke en finita tempo  $\tau(\mathbf{k})$  la derivaĵo estas proksima al la [incrementale] valoro inter la iniciala kaj finala statoj.

$$\left( \partial_t f \right)_{kol} \simeq -\frac{f(\mathbf{k}) - f_0(\mathbf{k})}{\tau(\mathbf{k})} \Rightarrow \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{r}} f + \frac{\mathbf{F}}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} f = -\frac{f(\mathbf{k}) - f_0(\mathbf{k})}{\tau(\mathbf{k})}$$

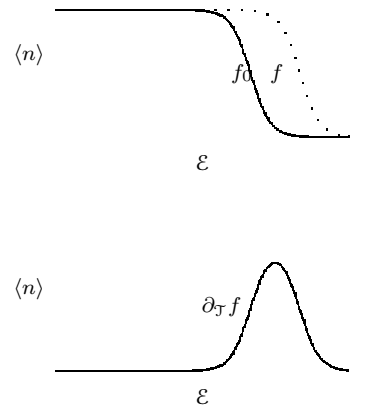
Si  $f$  ne dependas de la pozicio ĉar la eksterna kampo estas uniforma (space) kaj kostanta (tempe) la Boltzmann ekvacio rekondukas al

$$f(\mathbf{k}) = f_0(\mathbf{k}) + \frac{e}{\hbar} \tau(\mathbf{k}) \mathbf{E} \nabla_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}) \simeq \frac{e}{\hbar} \tau(\mathbf{k}) \mathbf{E} \nabla_{\mathbf{k}} f_0(\mathbf{k})$$

La lasta termo estas lineara repondo al la ordo  $O(\tau)$ . La eksterna kampo movas do la Fermi-a distribuo de valoron kiu permetas la kuranton

$$\mathbf{J}_n = \frac{-e}{4\pi^3} \int d\mathbf{k} \mathbf{v}(\mathbf{k}) (f_0(\mathbf{k}) + \frac{e}{\hbar} \tau(\mathbf{k}) \mathbf{E} \nabla_{\mathbf{k}} f_0(\mathbf{k})) = 0 + \sigma \mathbf{E}$$

kie  $\sigma$  estas la tensoro de elektrika kondukebleco. Oni povas vidi pluen ke la derivado de la Fermi distribuo  $\nabla_{\mathbf{k}} f_0(\mathbf{k}) = \partial_{\mathcal{E}} f_0 \nabla_{\mathbf{k}} \mathcal{E}(\mathbf{k}) = \hbar \partial_{\mathcal{E}} f_0 \mathbf{v}_n(\mathbf{k})$  dependas de la temperaturo kaj estas ne nula nur en la proksimaĵo de la Fermi-a energio.



**Term Elektra Efekto**

Kun la sama Boltzmann ekvacio havas ankaŭ la termo  $\mathbf{r}$  depena.

$$\mathbf{v} \partial_{\mathcal{T}} f \nabla_{\mathbf{r}} \mathcal{T} + \dot{\mathbf{k}} \nabla_{\mathbf{k}} f = \frac{f - f_0}{\tau} \quad f(\mathbf{k}) \simeq f_0(\mathbf{k}) + \frac{e}{\hbar} \tau \nabla_{\mathbf{k}} f_0 - \tau \partial_{\mathcal{T}} f_0 \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{r}} \mathcal{T}$$

La elektra kuranto nun havas alian termon kiu estas devita al la terma gradianto pli term elektra koeficanto.

$$\mathbf{J}_e = -\frac{e}{4\pi^3} \left( \left( \int d\mathbf{k} v(\mathbf{k}) \frac{e}{\hbar} \tau \nabla_{\mathbf{k}} f_0 \right) \mathbf{E} - \left( \int d\mathbf{k} v(\mathbf{k}) \tau \partial_{\mathcal{T}} f_0 \mathbf{v} \right) \nabla_{\mathbf{r}} \mathcal{T} \right) = L_{11} \mathbf{E} + L_{12} (-\nabla_{\mathbf{r}} \mathcal{T})$$

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{3} \langle v \rangle \quad \mathcal{E} \simeq \frac{1}{2} m^* v^2 \quad v_x^2 \simeq \frac{2\mathcal{E}}{3m^*}$$

$$L_{12} \simeq -\frac{2e\tau_{\mathcal{T}}}{3m^*} \partial_{\mathcal{T}} \left( \int d\mathbf{k} \frac{1}{4\pi^3} \mathcal{E}(\mathbf{k}) f_0(\mathbf{k}) \right) = -\frac{2e\tau_{\mathcal{T}}}{3m^*} \partial_{\mathcal{T}} \langle \mathcal{E} \rangle$$

Oni nomas **Seeback-a Efekto** la kuranto devita pro la term elektra gradianto kaj la **Peltier-a Efekto** la fluksa de kaloro devita pro la elektika kampo.

# Capitolo 11

## Nukleara Strukturo

En tiu ĉi ĉapitro oni volas priskribi la formo kaj strukturo de la nukleo. En nukleara traktado oni havas gravaj numeroj kiuj estas tre uzitaj. Oni iras prezenti ilin.

$A$  estas la numero de massa aŭ la numero de protonoj kaj neutronoj,  $N$  la numero de la neutronoj kaj  $Z$  de la protonoj. Scribita per

$${}^A_Z X$$

### 11.1 Atoma Potencialo

Protonoj kaj Fotonoj estas ambaŭ fermionaj partikloj de spin  $s = 1/2$ . Laŭ la Fermi-Dirac-a statistiko oni povas priskribi la nukleo kiel fermiona gaso. La du partikloj estas de du diversaj “kimikaj specoj” kaj estas traktigi separe. La protonoj havas ŝarĝon kaj ilian potencialon dependas pro la  $Z$  numero. Ekzistas ankaŭ alia potencialo kiu dependas de la nukleara forco. Ĉi tiu potencialo nomiĝas **Woods-Saxoon**-a potencialo kaj estas dedukta de la Fermi-Dirac-a statistiko, sia potencialo estos do:

$$\mathcal{V}(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{(r-R)/a}}$$

La **Forco Nukleara** estas forco kun proksima interacia radio (kelkaj fm) kaj sia forco estas preskaŭ la sama en sia akcia radio. La Nukleara forco estas eksplikebla por la interacio de ia partiklo, la **Piono**, kiu estas bosono. Tia partiklo estas elmetita kaj absorbitaj de la nukleonoj kaj reglas dinamike la relacio inter ilin. Tia partiklo eksistas en la tempo konsentita de la nedetermina principo por ne ŝanĝi la mason de la nukleonoj kaj, estinte masiva ( $\simeq 130 \text{ MeV}/c^2$ ) agas sur malgranda spaco kaj tempo.

Pro la Heisenberg-a principo  $\Delta x \Delta p = h$  oni scias ke la elementara volumeno en la faza spaco estas  $V = (\Delta x \Delta p)^3 = h^3$ . La energio de ekscitado en ia nukleo estas tre granda, sekvas ke la protonoj ĉeestas en siaj elementaraj statoj. Oni povas kalkuli respektka Fermi-a energio. La totala numero de partikloj estas  $dn = d^3q d^3p/h^3$  do

$$n = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{4\pi V p_F^3}{3h^3} \quad p_F = h \sqrt[3]{\frac{3A}{4\pi V}}$$

La **Nukleono**-j, protonoj kaj neŭtronoj, estas proksimaj ĉar estas plitenas al ia fiksa distanco de la nukleara forco. La volumeno de la nukleo estas  $V = r_0^3 A$  kie  $r_0$  estas empirik valoro kaj ekvalas  $r_0 = 1.22 \text{ fm}$ . En tia modelo oni havas  $n$  niveloj okupitaj pro du neŭtronoj kaj du protonoj kun spin antaŭversoj. En  $n$  niveloj haviĝas  $4A$  nukleonoj do

$$p_F = \frac{h}{r_0} \sqrt[3]{\frac{3n}{4\pi A}} \quad \mathcal{E}_F = \frac{h^2}{2r_0^2 m} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}$$

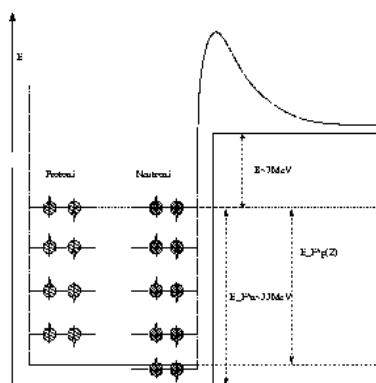


Figura 11.1: Nivela Okupado

kiu ne dependas de  $A$  kaj valoras preskaŭ  $33\text{ MeV}$ . Oni havas ankaŭ ia ligo energio  $B$  kiu superas la Fermi-a energio kaj valoras  $7\text{MeV}$ .

Oni devas anstataŭe konsideri ke kiam la valoro de  $A$  kreskas oni devas konsideri ke la numero de neŭtronoj superas la numero de protonoj por kontrasti la elektran repulson. Do oni devas scii ke la numero de la neŭtronoj superos la Fermi-a energio kaj provizi repulsa termo al la energio de ligo. Si oni konsideras ke la  $n$  partikloj ne estas  $4A$  sed  $N + Z$  ni scias la mez valora energio estas

$$\langle \mathcal{E}_{kin} \rangle = \int_0^{p_F} \mathcal{E}_{kin} p^2 dp / \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2m}$$

$$\mathcal{E}_{kin} = N \langle \mathcal{E}_N \rangle + Z \langle \mathcal{E}_p \rangle = 3/10m \cdot (N p_{nF}^2 + Z p_{pF}^2) \text{ aŭ}$$

$$\mathcal{E}_{kin} = \frac{3}{10m} \frac{\hbar^2}{r_0^2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}}$$

disvolvigi laŭe  $(N - Z)$

$$\mathcal{E}_{kin} = \frac{3}{10m} \frac{\hbar^2}{r_0^2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \left( A + \frac{5(N - Z)^2}{9A} + \dots \right)$$

## 11.2 Ŝela Modelo

Kiel atome oni povas vidi la konfigurado de la nukleonoj en la nukleo kiel elektronoj en centra potencialo. Oni havas la saman priskribon de ia centra potencialo kun kelkaj malsamaĵoj. Protonoj kaj neŭtronoj havas malsaman potencialon pro Coulomb-a repulsio do estas de diversa kimika speco kaj okupas la samajn nivelojn. Oni havas do diskretajn nivelojn per la kvantumaj numeroj  $\{n, l, m, s\}$  okupitaj de du protonoj kaj du neŭtronoj. Oni ne havas degenero de la numeroj  $\{n, l, m\}$  ĉar oni devas konsideri spin-orbito interacio kaj relativecaj termoj kiel en la atoma kazo sed multe pli valora grava. Kiam la precipa kvantuma numero estas plene okupita oni havas la ŝelon fermitan kaj la numero de protonoj aŭ neŭtronoj ke fermas ŝelon nomiĝas **Numeroj Magxikaj** kiuj estas  $2\ 8\ 20\ 28\ 50\ 82\ 126$ . Oni vidas granda stabileco kiam la nukleonoj proksimas este en numero de la maĝikaj numeroj kaj siaj ligoj energio kreskas. Oni povas priskribi la konduton de la nukleoj kun  $Z$  kaj  $N$  proksimaj al la maĝikaj numeroj. Oni povas fakte konsideri ke la nukleo en fermita ŝelo estos malmulte aktiva dume la nukleoj kiu havas ŝelon malfermitaj havas ia spin, angulara momento kaj pareco ne nula. En la nukleo ne plu valoras la reglo de Hund do oni konstruas

ĝin metinte spin kaj angularaj momentoj nuligantas laŭgrade. Si oni havas nukleonojn pliajn aŭ malpliajn de tia de la maĝikaj numeroj aŭ la nukleo estas ekscitita, la nukleo havos la konduto de tiu ĉi nukleonoj. Oni do difinas la **|Isospin|**  $I$  kiel la sumo de ĉiu spin ne nuligita pro aliaj nukleonoj kaj la **|Totala Angula Momanto|**  $J$ . Kiel en spektroskopa notacio oni volas uzi ia fekseĝan notacion uzinte  $J^P$  kie  $P$  estas la pareco  $P = (-1)^l$  kaj  $nl_j$  pro priskribi ia stato kie  $n$  estas la precipa numero,  $l$  tia angula ( $s, p, d, f, \dots$ ),  $j$  la totala angula momanta numero  $j = l + s$ . Tia proksimaĝo estas preskaŭ valida per numeroj multe mallonge de tia maĝikaj.

### 11.3 Kolektivaj Modeloj

Le nukleo havas ia formo kiu ne estas ĉiam sfera sed pli ofte oni povas priskribi ĝin per elipsoidala ĉar tia traktado estas bone aproksimiganta kaj simple ĉar traktebla per simetrika akso (kaze ĉi tiu  $e_3$ ). Oni traktas kiel rotanta solido de Hamilton-a  $\hat{H}_c = \hbar/2I \cdot \hat{\mathbf{L}}^2$  kie  $I$  estas la inercia momanto kaj  $\hat{\mathbf{L}}$  tia angula. Oni povas do kalkulinte tiuj aŭtovaloroj ( $\hbar/2m \cdot I(I+1)$ ) vidi **|Bandoj Rotaciaj|** difinitaj per la kvanta numero  $I$ . Kaze de nukleono ne kunigita pro nukleoj para-nepara ( $A$  nepara) la nukleono ne kunigita havos sia parto en Hamilton-a aditiva termo kie  $\hat{H} = \hat{H}_c + \hat{h}$  separebla en komponi en kiu  $\hat{\mathbf{L}} = (\hat{L}_c - \hat{l})_{\hat{x}} + \dots$ . Oni povas trovi la solvado de tiu ekvacio en termoj de la aŭtovaloroj  $\{I_c, i, \Omega_c, \omega\}$  de la operatoroj  $\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{l}^2, \hat{L}_3, \hat{l}_3$  aŭ trakti la sistemo kiel armonika oscilatoro modifikata (Nilson [1955]), priskribita per

$$V(r) = \frac{1}{2}M\omega_0^2 \left( \left(1 - \frac{2}{3}\epsilon\right)^2 \hat{x}_3^2 + \left(1 + \frac{1}{3}\epsilon\right)^2 (\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2) \right) - C_1 \hat{l} \cdot \hat{s} - C_2 (\hat{l}^2 - \langle \hat{l}^2 \rangle)$$

kie  $\epsilon$  estas paramtro de elipsoida deformiĝo por  $\hat{z}$  simetrio. Oni ne volas tie solvi tiu problemo sed sole diri ke estas solvebla en la termoj de tiuj aŭtovaloroj se oni konsideras perturbataj la termoj  $C_1$  kaj  $C_2$  ke en la nukleo, en kiu spin-orbito interacio estas ne traskurebla, signifas granda  $\epsilon$ .

Dekovrita ia nuklea ond funkcion de formo

$$R(\phi, \theta) = R_0 \alpha_{l,m} Y_l^m(\phi, \theta)$$

oni volas priskribi la konduko de la nukleo pro  $l$  valoroj.  $l = 0$  estas ne fizika ĉar la nukleo estas ne komprimebla,  $l = 1$  estas la dupola oscilado  $l = 2$  tia kvarpola kaj tiu pli. Praktike la oscilado pli frekventa estas tiu de kvarpola  $l = 2$  kaj  $-2 \leq m \leq 2$  kaj

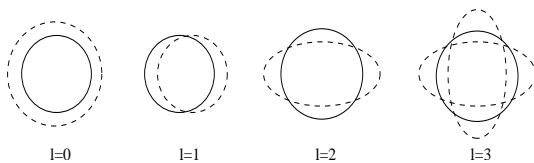


Figura 11.2:  $l$ polaj osciladoj

oni povas priskribi kiel oscilacio de kvin ne kunigitaj harmonikaj oscilatoroj, unu pro ĉiu  $m$

$$\hat{H} = \frac{C_1}{2} \hat{\alpha}_m^2 + \frac{C_2}{2} \hat{\alpha}_m^2$$

Tiu kreas kvantojn internajn al nukleo ke liberigas energion  $\mathcal{E}_N = (N + \frac{5}{2})\hbar\omega$  kie  $N$  estas la numero de la fononoj. Ekzistas degenero kiel en atoma kazo

### 11.4 Gamma Defalo

Kiam la nukleo estas en ia ekscitita stato defalas en la baza stato elmetante fotonoj. Estas la kazo de  $\alpha$  aŭ  $\beta$  defalo en kiam la nukleo ne perdus ĉio sia energio sed ĝin

havas ankoraŭ. Povas elmeti fotonoj de elektrik aŭ magnetik dupola formo. La fotono elportas angula momanto el nukleo en unecoj de  $\hbar$  kiu ne nulas ĉar fotono ne havas neniam nula angula momanto.

$$\underline{l}_{mic} = \underline{l}_{fin} + l \quad |\underline{l}_i - \underline{l}_f| \leq l \leq |\underline{l}_i + \underline{l}_f|$$

La elektrik dupola elmeto estas proporcionala al  $qr$  do ŝanĝas signon per pareca inversio  $r \mapsto r \quad \theta \mapsto \pi - \theta \quad \phi \mapsto \phi + \pi \quad Y_l^m(\pi - \theta, \pi + \phi) = -^l Y_l^m(\phi, \theta)$ . Dume la magnetik dupola elmito  $\propto qr \times v$  ne ŝanĝas signon por la sama inversio. Do ia transicio devas havi iun parecon kaj angul momanton. La letero  $l$  signifas du-, kvar-, ok- pola transiro dume  $E$  signifas elektriika kaj  $M$  magnetika.  $E_1, M_2, E_3$  ŝanĝas parecon kaj  $M_1, E_2, M_3$  ne. Praktike la inteso de tiu elmitoj estas kalkulebla por ia multipola operatoro  $m_{E,M}(l) \int \psi_f * m_{E,M}(l) \psi_i dV$ . Oni povas anstataŭe simpligi tia priskribo imaginante la transiro kiel unuopa protono kiu moviĝas inter du ŝelaj statoj. Oni do uzas **|Weisskopf-aj Unuecoj|** [1952] kiuj racieme proksimaĝas la empirik valoroj.

$$T_{E1} = 1.0 \cdot 10^{14} A^{2/3} \mathcal{E}_\gamma^3 \quad T_{E2} = 7.3 \cdot 10^7 A^{4/3} \mathcal{E}_\gamma^5 \quad T_{E3} = 34 \cdot 10^1 A^2 \mathcal{E}_\gamma^7$$

$$T_{M1} = 3.1 \cdot 10^{13} \mathcal{E}_\gamma^3 \quad T_{M2} = 2.2 \cdot 10^7 A^{2/3} \mathcal{E}_\gamma^5 \quad T_{M3} = 10 \cdot 10^1 A^{4/3} \mathcal{E}_\gamma^7$$

do oni povas vidi la grandecaj ordoj kiuj priskribas la probablon de la transiro. Praktike la defalo eksistas por la minusaj  $l$ polaj transiroj.

## 11.5 Reakcioj

En urta proceso gravas tri grandecoj: la urta sekcio, la meza libera pato kaj la frekvenco de la urtoj. Oni uzas  $N_p$  partikloj de ia speco sur  $N_c$  de alia en  $N_r$  reakcioj. la denseco de tiuj partikloj estu  $n_p = N_p/V_p = \rho_p/m_p$ . La flukso de la [fascio] [incidente] estas  $\Phi = n_p |v| = I/S = \dot{N}_r/S$ . Oni volas serci tian faktoron kiu priskribas la frakcion de partikloj adsorbitaj sur elmetitaj. Oni difinas la **|Urta Sekcio|**

$$\sigma = \frac{\dot{N}_r}{\Phi} \quad dN_{12} = N_2 n_1 \sigma_{12} v_2 dt$$

kiu povas esti la sumo de termoj de malsama naturo. Sijaj dimensioj estas de surfaco kaj la praktikaj valoraj por nuklearaj reakcioj estas la sub potencaj de la barn ( $1 \text{ barn} = a0^{-28} m^2$ ). La urta sekcio, ĝenere, depenas de la energio. [Sperimentalente] oni volas koni la urta sekcio laŭ la anguloj kalkulante  $\sigma = \int_0^{4\pi} d\Omega \sigma(\phi, \theta) d\Omega$ .

### 11.5.1 Urta Sekcio

#### Geometrika Termo

Si oni konsideras du sferoj de radio  $r_p, r_c$  la urta sekcio valoras sole si ĉeestas la urto, prefere, si la **|Urta Parametro|**  $b$  estas minusa de la sumo de la du radioj. La urta sekcio estas do:  $\sigma = \pi(r_p + r_c)^2$ .

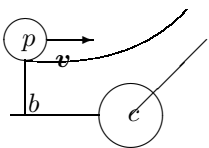
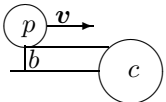
#### Coulomba Termo

De la konservo de angula momanto kaj energio

$$\frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + \frac{Z_p Z_c}{r} = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad m r \dot{\phi}^2 = m v_0 b$$

oni povas obteni  $\dot{r} = -v_0 \sqrt{1 - 2 \frac{Z_p Z_c}{m v_0^2 r} - \frac{b^2}{r^2}}$ , prefere:

$$\frac{d\phi}{dr} = -\frac{b}{r^2} \left( 1 - 2 \frac{Z_p Z_c}{m v_0^2 r} - \frac{b^2}{r^2} \right)^{1/2}$$



$$\dot{\phi} = \frac{v_0 b}{r^2}$$

$$\dot{\phi}/\dot{r} = d\phi/dr$$



### 11.5.2 Kvantuma Interado

Oni volas priskribi la interadon inter du partikloj sekvinte la kvantuma priskribo. Oni volas mizuri la numeron de partikloj de momanto  $p$  ke al la angulo  $\phi$  alvenas de granda distanco rilate la atomaj dimensioj. La numero de partikloj devigitaj estos proporcionala al la flukso incidanta, al la frakcio de angulo solida  $d\sigma(\phi, \theta)$  kaj de la urta sekcio kiu dependas de la fiziko de la interado.

$$dN = \sigma(\phi, \theta) \mathbf{J}_{en} d\Omega(\phi, \theta)$$

La urta sekcio estas ankaŭproporcionala al la flukso elirante  $\sigma := \mathbf{x}/r \cdot \mathbf{J}_{el}$ .

#### Kolizo elastiika

En tiu parto oni traktas la [singlan] kolizon de la partikloj de la [fakso] kun unu centro adsorbaj sine transferi energio al la ekscito de la centro. La [fakso] estas komponita de malgrandaj partikloj kiuj ne interagis inter ilin. Tiuj partikloj, por priskribi bonan interadon, devas havi malgrandan disigon en la komponoj de la momanto  $\delta p/p \ll 1$ , prefere per la De Broglie-a rilato

$$\frac{\delta p}{p} = \frac{\hbar \lambda}{\delta l \hbar} = \frac{\lambda}{2\pi \delta l} \ll 1$$

do la ond frekvenco de la paketo devas esti multe malgranda de la dimensioj de la paketoj  $\delta l$  kaj tiuj dimensioj devas esti minusaj de la interad radio de la fortoj. La distancoj  $l_i$  de la [sorgente e rivelatore] devas esti sufiĉe [lontani] mode ke la paketo ne disigiĝas ĉar poste ia tempo la paketo grandiĝas. La rilato petas ke

$$\frac{\lambda l_i}{2\pi} \ll \delta l$$

...

Oni ne povas mizuri anguloj tre grandaj ĉar povas [riveli] partiklojn ne difuigitajn.

# Capitolo 12

## Subnukleara

En tiu ĉapitro oni volas marki la pli gravajn rezultojn kaj konceptojn de la Subnukleara materio ĉar oni ne povas ekpliki plene la derivaĵoj de tiuj konceptoj. Oni ne sekvos la storikajn rezultojn.

### 12.1 Simetrioj

Oni volas marki la simetriojn kiuj konserviĝas en la subnukleara procesoj. Ekzemple la ŝarĝoj (elektrikaj, malfortaj kaj koloraj) ĉiam konserviĝas. Oni havas ankaŭ aliajn diskret variablojn kiuj difinas specife la partiklojn. La partikloj estas separitaj per *adronoj*  $h$  kaj *leptonoj*  $l$ . La *lepton*-oj estas Fermi-aj  $f$  dume la *adron*-oj estas kaj Fermi- kaj Bose-aj. La *quark*-oj estas la komponantoj de la  $h$ . La  $h$  estas aŭ la *meso*-oj, komponitaj de du *quark*, kaj la *bario*-oj komponitaj de tri *quark*. Ĉiuj *quark* havas saponon

Partiklo	Saporo	Maso [MeV]	Ŝarĝo[e]
up $u$	spin 1/2	1.3-3	2/3
down $d$	spin -1/2	3-7	-1/3
strange $s$	[stranezza] -1	95±25	-1/3
charm $c$	[fascino] 1	1250	2/3
bottom $b$	beleco -1	4200	-1/3
top $t$	[top] 1	173000	2/3

Oni havas ankaŭ la bariona numero kaj la leptona numero kiuj ĉiam konserviĝas. Ĉiuj *quark*-oj havas barionan numeron egala al 1/3, ĉiuj *antiquark*-oj havas barionan numeron -1/3. Ankaŭ la *lepton*-oj havas siajn *lepton* saponojn. La elektrono kaj la neutrino  $\nu_e$  havas elektronan saponon la  $\mu$ -o kaj  $\nu_\mu$  havas  $\mu$ -an numeron, tiel la  $\tau$ .

	Maso [MeV]	Vivtempo	Defaloj
$e$	0.511	>4.610 <sup>24</sup> [jar]	
$\mu$	105.7	2.19 [ $\mu$ s]	$e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$
$\tau$	1776	290 [fs]	$\mu^- \bar{\nu}_\mu, e^- \nu_e \nu_\tau, h^- \nu_\tau$

Estas ankaŭ enaj simetrioj en unecaj spacoj de oploj kiel la transformiĝoj en la grupo  $SU_2$ . La memloka *spin* petas transformiĝan konservadon. En la reakcioj oni devas konsideri ke la *isospin* ĉiam devas esti konservita. La rezulto de iniciala opl statoj sekvas la regulojn de la dekompono en Hilbert-aj spacoj, kiel priskribita en la sekcio de Kvantuma Mekaniko. Pere la Clebsh-Gordan- koeficientoj oni povas kompreni la eblajn dekomponojn de la iniciala prezento en la finala kaj [valuti] la probablo inter du eventoj. La probablo de finala stato estas la kvar modulo de sia Clebsh Gordan koeficiento.

Ekzistas ankaŭ transformajoj kiuj ne elvenas de infinitezimaj transformajoj. Tiuj transformoj estas por ekzemplo la interŝanĝo inter du partikloj  $P$ , aŭ la kordinata inversio, la interŝanĝo inter partiklo kaj antipartiklo  $C$  kaj la tempa inversio  $T$ .

## Pareco

La  $P$  operatoro invertas tiel la aksojn

$$\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}, t \mapsto t, \mathbf{p} \mapsto -\mathbf{p}, \mathbf{x} \times \mathbf{p} \mapsto \mathbf{x} \times \mathbf{p}$$

La  $P$  operatoro estas uneca operatoro kaj tiel havas memvaloroj  $\pm 1$ . La [vakuo] havas plusa valoro, la Bose-aj kaj antiBose-aj devas havi la saman parecon dume Fermi-aj kaj antiFermi-aj havi malsaman. La spaca inversio estas

$$r \mapsto r \quad \phi \mapsto \pi + \phi \quad \theta \mapsto \pi - \theta \quad Y_l^m(r, \phi, \theta) \mapsto (-)^l Y_l^m(r, \phi, \theta)$$

La pareco de la sistemo komponita de du partikloj estas

$$P = P_1 P_2 (-)^l$$

La fotono estas la partikla formo de la vektora potencialo  $\mathbf{A}$  kaj havas egala momanto kaj pareco  $J^P = 1^-$ . ◁Pareco

Se du Bose-aj estas estas egalaj sia statoj devas esti simetrika do devas havi  $l$  kaj  $J$  parajn  $0^+ 2^+ \dots$

Partikloj sine *spin* havas  $0^+ 1^- 2^+$

La pareco per partiklo antipartiklo en notacio  $(^{2s+1}L_J, J^P)$  estas

$$(^1S_0, 0^-)(^3S_1, 1^-)(^1P_1, 1^+)(^3P_0, 0^+)(^3P_1, 1^+)(^3P_2, 2^+)$$

kie  $2s + 1 = 1$  estas la unola stato dume  $2s + 1 = 3$  la triopla.

$^{20}Ne^* \rightarrow ^{16}O + \alpha$  ne konservas parecon ĉar  $1^+ \rightarrow 0^+ + 0^+$  △

Fortaj kaj elektrikaj interadoj konserviĝas parecon dume la malfortaj ne ĉiam. De la grandecoj enkondukitaj oni vidas ke  $0^+$  estas skalara kvanteco,  $0^-$  pseudoskalara,  $1^-$  vektora,  $1^+$  pseudovektora (prefere aks vektora).

## Partiklo Antipartiklo

La  $C$  operatoro operas sur partiklon mode ke la partiklo per sia  $C$ partiklo [anihilas]. La ŝarĝoj devas do esti opositaj. Tiu uneca operatoro ŝanĝas la ŝarĝoj de kompleksive neŭtraj partikloj kiel la  $\pi$ -o. ◁C-Operatoro

La  $C$  operado sur la fotono  $\gamma$  havas mem valoro  $-1$  ĉar estas la efekto de la ŝanĝo de la ŝarĝoj de la kampo.  $C|n\gamma\rangle = (-)^n |n\gamma\rangle$ .

$\pi^0$  estas memstato de  $C$  ĉar  $C|\pi^0\rangle = +|\pi^0\rangle$  dume  $\pi^\pm$  ne estas memstatoj de tia operatoro:  $C|\pi^-\rangle = |\pi^+\rangle$  kaj  $C|\pi^+\rangle = |\pi^-\rangle$

*Meso-* kaj *antimeso-* kun kompleksive nula *spin* interŝanĝas la du partikloj  $C|\pi^+, \pi^-\rangle = |\pi^-, \pi^+\rangle = P|\pi^+, \pi^-\rangle = (-)^l |\pi^+, \pi^-\rangle$ . Se la *meso-*oj havas ne nula *spin*  $C$  agas kiel kordinata interŝanĝo operatoro ( $P$ ) kaj *spin* interŝanĝo.

Ankaŭ por Fermi kaj antiFermi la  $C$  operatoro agas kiel [prie]:  $C|f\bar{f}\rangle = (-)^{l+s} |f\bar{f}\rangle$

Por du egalaj bosonoj  $J^{PC} = 1^{--}$

$$(^1S_0, 0^{++})(^5S_2, 2^{++})(^3P_0, 1^{-+})(^3P_1, 1^{-+})(^3P_2, 2^{-+})$$

Por du egalaj fermionoj de *spin* = 1/2

$$(^1S_0, 0^{-+})(^3S_1, 2^{--})(^1P_0, 1^{+-})(^3P_0, 0^{++})(^3P_1, 1^{++})(^3P_2, 2^{++})$$

△

## T, CPT

La  $T$  operatoro ŝanĝas

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}, t \mapsto -t, \mathbf{p} \mapsto -\mathbf{p}, \mathbf{x} \times \mathbf{p} \mapsto -\mathbf{x} \times \mathbf{p}$$

De teorikaj [konsideroj] oni scias ke ankaŭ se  $P$ ,  $C$  kaj  $CP$  ne estas konservitaj oni devas ĉiam konservi la akcio de la operatoro  $CPT$ .

## Krandecoj

Si oni difinas la indico  $\mu$  en la aro  $0, 1, 2, 3$  kaj la  $i$  en  $1, 2, 3$  oni povas difini la **|Dirac-a Matricoj|**.

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

kie  $\sigma^i$  estas la Pauli matricoj. Indicante  $I$  kaj  $\nu$  la ondfunkcio de *leptonoj* kaj sia neŭtrino, oni povas komponi tiujn akirante la sekvantaj kovariant grandecoj.  $\bar{l}\nu$  estas skalara,  $\bar{l}\gamma_5\nu$  pseŭdoskalara,  $\bar{l}\gamma_\mu\nu$  vektora,  $\bar{l}\gamma_\mu\gamma_5\nu$  aks vektora,  $1/(2\sqrt{2}) \cdot \bar{l}(\gamma_\mu\gamma_{\mu'} - \gamma_{\mu'}\gamma_\mu)\nu$  tensora. Empirike oni dekovris ke la partikloj ĉeestantaj nature estas nur vektoroj aŭ aks vektoroj. Iu ajn diras ke la gravitonojn devus esti tensora grandecoj sed nurtempe ne estas akoraŭ dekovritaj. Si oni volas konsideri la defalo de  $\pi$ -o en  $\bar{l} + \nu$  konante la kvarimpulso  $p^\mu$  de la piono, oni povas difini la **|Malforta Vektora Kuranto|**-n kalkulante la matrica elemento de la produkto

$$M \propto \mathcal{P}_f \phi_\pi \bar{l} p^\mu \gamma_\mu \nu = \mathcal{P}_f \phi_\pi \bar{l} (p_l^\mu + p_\nu^\mu) \gamma_\mu \nu$$

kie  $\mathcal{P}_f$  estas la probableco de la finala stato kaj  $\phi_\pi$  la pseŭdoskalara ond funkcio de la iniciala  $\pi$ -o. Oni dekovris ke en la reakcioj oni povas havi kaj vektoraj kaj aks vektoraj kurantoj. Oni nomas tiun  $v - av$  strukturo kaj prezetigas per  $(\mathbb{I} - \gamma_5)$  operatoro en la kalkulo de la malforta kuranto kiu montras la du aspektoj.

## Isospin

Si oni havas  $n$  *quarkoj* oni povas konstrui la *adronoj* sekvinte la regloj de la sumo de la prezantoj. La simetrioj de la *isospin* ŝanĝas per la neeksakta egaleco inter la partikloj. Neŭtrono kaj protono estas konsideritaj kiel du statoj de la *isospin*  $1/2$  sed havas divers masojn e la neŭtrono ne estas stabila. La elctr magnetikaj interadoj ne konserviĝas la *isospinn* sed ĝia tria komponanto. Kun la uso de la numeroj de *isospin* kaj de **|Iperŝarĝo|**, difinita kiel  $Y = 2(I_z - Q) = B + S$ , oni povas koni ĉiam partikloj komponitaj de la *quark*  $u$ ,  $d$  kaj  $s$ .

# Capitolo 13

## Kosmologio

### 13.0.1 Ecoj de la Universo

La kosmologia principo diras ke la universo estas omoĝena kaj isotropa. Omoĝena signifas ke la strukturoj ripetiĝas medie en siaj skalaj prefere oni havas galakso de steloj kiel oni havas amasoj de galaksoj ktp. De la principoj de la relativeco oni scias ke por la lumrapideco ekzistas horizonon al la vido kaj partoj de la spacoj estas nevideblaj de la komenco de la universo. Oni ne povas diri fakte ke la universo estas homoĝena ĉar ne estas intrŝanĝo inter la partoj kiuj ne estas en direkte kontakto sed en la porcio de universo videbla tiu estas vere fine al  $10^{-5}$  kaj oni povas krei ke tiu valoras ĉie.

De la eroj de la ĝenera relativeco kiu oni ne traktos oni havas ke la Einstein-a ekvacio la Einstein-a tensoro egalas al

*R* estas la Ricci kostanto,  $T_{ij}$  la tensoro de energio kaj momento

$$G_{ik} = \epsilon_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}$$

kaj estas solvigebla per la **Friedmann-a Ekvacioj** si oni konsideras homoĝena masa distribuo. Por spaco kun sferik simetrio la metriko asociita al tiu spaco en la Newton-a limito ( $Gm/lc^2 \ll 1$ ) por la Birchoff-a teoremo estas la Minkovskij-a konsiderinte ke la spac mezuro pligrandigas kun la tempo

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 dl^2$$

Oni volas kalkuli la Friedmann ekvacio en Newton-a priskribo. Oni scias ke pro prova maso la akcelo por gravita forco estas

$$\ddot{i} = -\frac{Gm}{l^2} \quad \ddot{ll} = -\frac{Gm}{l^2}l \quad \frac{d}{dt}(i^2) = Gmd_t \frac{1}{l}$$

kie oni havas multipliki pro  $\dot{l}$  kaj notita la diferenciale formo. La una integralo estas

$$i^2 = 2\frac{Gm}{l} = \frac{8\pi}{3}G\rho l^2 + c$$

Oni vidis ke la longeco  $l$  estas temp dependa kaj oni povas skribi ĝin kiel produkto de fiksa distanco per la skala faktoro  $l(t) = r_0 a(t)$ . La dua derivaĝo de Newton-a ekvacio montras pluen

$$\ddot{i} = -G\frac{4}{3}\pi\rho l \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}G\rho$$

La denseco depenas de la longeco  $l$  je la tria potenco. Do si oni konsideras la produkto  $\rho a^3$  tiu ne devas ŝanĝi en la tempo, kaj al ni donas la tria kaj lasta ekvacio

$$d_t(\rho a^3) = 0 = \dot{\rho}a^3 + 3\rho a^2 \dot{a} \quad \dot{\rho} = -3\rho \frac{\dot{a}}{a}$$

Si oni anstataŭe konas la ĝenerala relativeco oni obtenus

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3\frac{\mathcal{P}}{c^2})a \quad \dot{a}^2 + K = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 \quad \dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + \frac{\mathcal{P}}{c^2})$$

kie  $K$  definis la metrikon de la spaco kiel oni povus vidi pluen.

Si oni volas konsideri la universo kiel homoga kaj ideala fluo oni devas konsideri la rekta metriko asociita al la spaco. La **|Robertson Walker-a Metriko|** estas la diferenciale de la nevariana intervalo

$$ds^2 = \left( dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \right)$$

kie  $r$  estas la distanco en polaraj koordinatoj,  $\tau := \int 1/a(t)dt$  estas la **|Konforma Tempo|** integrata sur la propra tempo  $t$  dume  $K$  estas la parametro kiu elektas la tipon de metrikon. Si oni havas **Euclide-a** metriko  $K$  nulas si la spaco estas sferika kaj havas **Gauss-a** kurvaturon ( $1/R^2$ )  $k$  egalas 1n dume pro  $k = -1$  oni havas iperbolikan. Si oni ne scias la metrikon de la universo oni devas konsideri ke la distanco inter du punktoj estas

$$d_P(t) = \int_0^r \frac{adr'}{(1 - Kr^2)^{1/2}} \quad \begin{matrix} K \equiv 0 \\ \equiv 1 \\ \equiv -1 \end{matrix} \begin{matrix} ar \\ \sin^{-1}(r) \\ \sinh^{-1}(r) \end{matrix}$$

La distanco kunmova havas  $a$ n kiu estas temp dependa kaj parton kiu dependas sole de la distanco  $r$ . Oni skribas la **|Hubble leĝo|**n per

$$\dot{d}_P = \frac{\dot{a}}{a} d_P \quad H(t) := \frac{\dot{a}}{a}$$

skribinte la bone notita **Hubble** kostanto kiu ne estas precize mizurita. Por tiu oni skribos la valoron de la **Hubble** kostanto en unecoj de  $h$  kiu estas utila variablo por poni

$$\frac{H(t_{nun})}{h} := 100 [kms^{-1} Mpc^{-1}]$$

mode ke oni povas poni la valorojn de la kosmologiaj grandecoj en la diskordantaj  $h$  grandecoj. En tiu vidado la komponoj de la rapidecoj de la distancoj  $v := \dot{d}_P$  estas simple

$$v(r) - v(r') = v(r - r')$$

Oni volas difini novan grandecon kiu estas facile mizuri. Si oni konas la transiro de iu elemento (**Ekz Compton-a** longeco) oni povas observi la diferencon inter la teorika kaj la observita frekvenco kaj nomi ĝin **|Roza Traslado|**

$$z := \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda}$$

kiu al ni diras la **Doppler-an** trasladon pro la expansio de la universo. La roza traslado estas kunigita al la skala faktoro sed ankaŭ al la temperaturo, la tempo sed ankaŭ la distanco kiel oni vedos

$$\nu a = \nu_0 a_0 \quad \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{a_0}{a} \quad a = a_0(1_z)$$

La denseco de energio  $\rho$  estas priskribita de la ekvacio de stato

$$\mathcal{P} = w\rho$$

kie  $w$  estas numero kiu povas ŝanĝi laŭe la presenco en la universo de diversaj energiaj kontribuoj. Se la pli granda kontribuo al la energio estas donita de la radiado oni scias

de la luma elmito ke la presiono de radiado estas proporcionala al  $1/3$  de la denseca energio. Poste la dekuplo de materio kaj radiado la energia denseco estas sur ĉiu la sumo de la masoj ene la universo kaj oni ne havas pli presionon kiel la polvo aire surponita; do  $w = 0$ . Poste tiu la universo pro energio asociita al la vakuo, kiu oni ne scias priskribi kaj kompreni, la pli granda kontribuo de la energio de la universo konsistas en la nomata **Energio Obskura** kiu donas malplu-a presiona kontribuo  $w = -1$ .

Oni volas nun solvi la Friedman ekvaciojn kiuj al ni diros pri la expansion de la universo en la tri diversaj epokoj.

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{\mathcal{P}}{c^2}\right) = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho(1+w) \quad \rho = \rho_*\left(\frac{a}{a_*}\right)^{-3(w+1)}$$

en la proksimado de Euklide-a universo ( $k = 0$  aŭ  $kc^2 \ll 8\pi G\rho a^2$ ) oni skribos

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_*a_*^{\frac{3}{2}(1+w)}a^{-\frac{3}{2}(1+w)-1}} \quad daa^{\frac{3}{2}(w+1)-1} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_*a_*^{\frac{3}{2}(1+w)}}dt$$

Se oni solvas tiuj ekvacioj oni havos

$$H_*^2 = 8\pi G\rho_*/3$$

$$a = a_*\left(1 + \frac{3}{2}(1+w)H_*\Delta t\right)^{\frac{2}{3(1+w)}} := a_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}} \quad \frac{2}{3H_*(w+1)} = t_*$$

de kiu oni havas kun tiuj sekvantaj difinoj

$$a = a_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}} \quad \rho = \rho_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2} \quad H = \frac{2}{3(1+w)t}$$

Oni nun volas solvi la problemon per ia ajn metriko ( $K = -1, 0, 1$ ).

$$\dot{a}^2 = H_0^2\frac{a_0^3}{a} - K \quad a = \frac{H_0^2a_0^3}{\dot{a}^2 + K} \quad \dot{a} = -2\dot{a}\ddot{a}\frac{H_0^2a_0^3}{(\dot{a}^2 + K)^2}$$

De  $\ddot{a} = d_t\dot{a}$  oni skribos

$$dt = -2H_0^2a_0^3\frac{d\dot{a}}{(\dot{a}^2 + K)^2}$$

Por  $K = 1$

$$\dot{a} := tg\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) \quad t = \frac{1}{2}H_0^2a_0^3(\alpha - \sin\alpha) \quad a = H_0^2a_0^3(1 - \cos\alpha)$$

dume por  $K = -1$

$$\dot{a} := tgh\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) \quad t = \frac{1}{2}H_0^2a_0^3(\sinh\alpha - \alpha) \quad a = H_0^2a_0^3(\cosh\alpha - 1)$$

kaj fin fine por  $K = 0$

$$t = 2H_0^3a_0^3\left(0 - \frac{1}{-3\dot{a}_0}\right) = \frac{2}{3H_0}$$

de tiu oni povas kalkuli la aĝo de la universo per en la diversaj modeloj  $t_0^{K=-1} < t_0^{K=0} < t_0^{K=1}$

La dua grava informo kiu oni povas obteni estas la tempo de transado inter radiado-materio-obskura energio dume la universa istorio.

$$\rho_m(1+z_1)^3 = \rho_{rad}(1+z_1)^4 \quad \rho_m(1+z_2)^3 = \rho_\Lambda$$

Oni nomiĝis  $\rho_\Lambda$ -n en la kazo de la obskura energio ĉar oni povas poni en la **Einstein-a** ekvacio kostanton nomita **Kosmologa Kostanto** kiu donas al la universo termon

atraktiva kiel en la obskura energio. Tiu termo ŝanĝas la valoro de la presiono kaj de la energia denseco

$$\rho \rightarrow \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$$

Por imagini tiun oni povas konstrui skalara kampo  $\phi$  kiu povas ŝanĝi la presiono kaj energio de la universo en tiu mode Lagrange-a priskribo

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \mathcal{V}(\phi) \quad \mathcal{P}(\phi) = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \mathcal{V}(\phi) \quad w = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \mathcal{V}(\phi)}$$

sed ne estas neniam troviata tiu spece kampo.

## Abundancoj kaj Dekuplaĝo

Oni volas nun renkonti la vivo de la universo parolinte de la pli valorata modelo. Ĉio komencis en la *big bang*, la vera singulareco de la denseco de energio en ĉio punkto de la spaco. Oni povas renkonti la vivo de la universo de tiu momento ĉar oni ne povas diri ion antaŭ tiu evento. Oni montros en logaritmika skalo la evolvo de la parametroj, la temperaturo kaj la energio malgrandiĝis kaj permetas la komponon de pli grandaj strukturoj, la spaco, kiu oni jam scias ke tiu estas mizurebla per la roza traslado  $z$ , grandiĝis.

Supren la energio  $10^{19}[GeV]$ , **[Plank-a Maso]**, probable la kvar forcoj uniĝas kaj oni devas trakti unifikan teorion ke en tiu momento ne ekzistas kaj pro tiu oni povas diri nenion de tiu epoko. Poste la temperaturo de  $10^{16}[GeV]$  anstataŭ la forta dekopliĝas de la elektromalforta forcoj kaj la universo estas komponita de *quark* [gluon]-a plasmio. Por malpli de  $1[TeV]$  ankala malforta forco dekopliĝas de la elektromagnetika. Malsupre la temperaturo de  $1[GeV]$  la *quark* legiĝas kaj formas la pli stabilaj partikeloj el ĉiuj, la neŭtroj kaj la protonoj. Ĉirkaŭe  $1[MeV]$  la malforta forco komenci havi malgrandan interadan radion kaj la neŭtrinoj dekopliĝas formante la pli treaĝa informo sur la *big bang* ĉar la nedekuplitaj partikeloj kontinue interaĝigas inter ilin kaj ne povas alveni al ni. Sine la kuplaĝo de la neŭtrinoj la reakcioj  $n + \nu_e \rightarrow p^+ + e^-$ ,  $n + e^- \rightarrow p^+ + \bar{\nu}_e$  estas sfavoritaj kaj oni povas formi la unua nukleoj (*D*, *He*, *Li*) ankaŭ se la presenco de la fotonoj kontinue fotodetruas la *Deuterion* kaj la nukleoj kontinue reformiĝas. Preskaŭ  $[1eV]$  finfine la radiado dekopliĝas de la materio kaj konstituas, poste la malvarmo de la ekspansio, la **[CMB Kosma Mikroonda Fondo]**. Al tiu tempo la nukleoj povas formiĝi kaj oni havis la materion kiu povas formi la astronomikaj strukturoj.

Oni nun volas motri iom da kalkuloj kiu permetas al ni de kompreni la abundanco de la elementoj kaj la mekanismoj kiu reglas tiu tre interaĝanta fluido.

Sekvinte Boltzmann oni definis la distribua funkcio per

$$f(\mathcal{E}, \mathcal{T}) = \frac{1}{e^{\frac{\mathcal{E}-\mu}{\mathcal{T}}} \pm 1} \quad n(\mathcal{T}) = g \int d\mathcal{E} f(\mathcal{E}, \mathcal{T}) \quad \mathcal{E} = \sqrt{p^2 + m^2}$$

Oni povas poni du limojn por kalkuli tiun integralon, la ultra relativista  $\mathcal{E} - \mu \simeq p$  kaj la nerelativista  $\mathcal{E} \simeq m + p^2/2m$ . Por la unua

$$n(\mathcal{T}) = g \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{d\Omega dp^2}{e^{\frac{p}{\mathcal{T}}} \pm 1} = \frac{g\mathcal{T}^3}{2\pi^2} \int_0^\infty dx (e^x \pm 1)^{-1}$$

kaj estas solvebla per la Euler-a  $\zeta$ .

### 13.0.2 Mat: Euler-a $\zeta$

Mat

La Euler-a  $\zeta$  estas difinita per

$$\zeta(x) := \sum_i \frac{1}{x^i}$$

$c = \hbar = k_B = 1$

$g$  deĝenero de la statoj, elikeco.  $\pm 1$  laŭe Fermi-Dirac aŭ Bose-Einstein



Tiu funkcio ne estas analiza sed oni povas facile numerike kalkuli ĝin. Tiu funkcio aperas tre ofte (ankaŭ rilate la unuaj numeroj) sed oni volas difini ĝin por la numerik valoroj de sia integral formo ...

✓

$$n(\mathcal{T}) \stackrel{FD}{=} \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g \mathcal{T}^3 \quad \stackrel{BE}{=} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g \mathcal{T}^3$$

Si oni anstataŭe volas kalkuli la denseco de energio oni obtenus

$$\rho(\mathcal{T}) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p p}{e^{\frac{p}{\mathcal{T}} \pm 1}} = \frac{\pi^2}{30} g_*(\mathcal{T}) \mathcal{T}^4$$

$$g_* := \sum_{i \in FD} g_i^{spin} \left(\frac{\mathcal{T}_i}{\mathcal{T}}\right)^3 + \sum_{i \in BE} g_i^s \left(\frac{\mathcal{T}_i}{\mathcal{T}}\right)^3$$

Por la ne relativeca proksimado la kalkulo estas

$$n(\mathcal{T}) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{e^{-\frac{m-\mu}{\mathcal{T}} - \frac{p^2}{2m\mathcal{T}}}}{1 \pm e^{-\frac{m-\mu}{\mathcal{T}} - \frac{p^2}{2m\mathcal{T}}}} \simeq \frac{g}{(2\pi)^3} e^{-\frac{m-\mu}{\mathcal{T}}} \int d^3 p \frac{e^{-\frac{p^2}{2m\mathcal{T}}}}{1 \pm 0} = g \left(\frac{m\mathcal{T}}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m-\mu}{\mathcal{T}}}$$

kiu ne montras diferencoj inter Fermi-aj kaj Bose-aj. Oni do povas difini la **|Dekuplaĝo|** kiam la tempo de kolizo  $t_k = \Gamma^{-1}$  estas pli granda de la tempo de ekspansio  $t_e = H^{-1}$ , prefere  $\Gamma < H$ .  $\Gamma$  estas la bone notita largeco de interado  $\Gamma := \mathbf{n}(\sigma v)$ . Oni vidis ke  $H$  estas skribebbla per

$$m_P := \frac{1}{\sqrt{P}} \text{ Plank-a maso}$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho = \frac{8\pi^3}{90} G g_*(\mathcal{T}) \mathcal{T}^4 \quad H = \sqrt{\frac{8\pi^2}{90} g_*(\mathcal{T})} \frac{\mathcal{T}^2}{m_P}$$

Oni scias ke la interadoj meditaj per diversaj Bose-aj havas diversan urtan sekcion  $\sigma$   $G_X$  Fermi-a kostanto

$$\sigma_{em} \propto \frac{\alpha}{\mathcal{T}^2} \quad \sigma_{masa} \propto G_X \mathcal{T}^2 \propto \frac{\alpha^2}{m_X} \mathcal{T}^2$$

De tiu oni povas trovi la tempo de dekoplaĝo de la malforta interado

$$\Gamma_X \propto \mathcal{T}^3 G_X \mathcal{T}^2 \quad \frac{\Gamma}{H} = G_X^2 m_P \mathcal{T}^3 < 1 \quad \mathcal{T} < G_X^{-2/3} m_P^{-1/3}$$

kaj de la elektromagnetika

$$\Gamma \propto \mathcal{T}^{\frac{3}{2}} \frac{\alpha^2}{\mathcal{T}} \frac{\Gamma}{H} = \alpha^2 \frac{m_P}{\mathcal{T}} \quad \frac{\Gamma}{H} \propto \frac{\alpha^2 m_P}{\mathcal{T}^{\frac{1}{2}}}$$

Oni nomiĝas **|Relikto Kosmiko|** la tipo de particelo kiu dekopliĝas kaj *varma* aŭ *malvarma* la relikto kiu dekopliĝas antaŭe aŭ poste la derelativistikeco. Poste ĉio dekoplaĝo oni devas ŝanĝi la valore de deĝenero de la specoj  $g^*$ .

Oni konsideras gason de elektronoj kaj protonoj kiuj troviĝas en la sama spaco. Se oni volas koni la temperaturo kiu permetas la deionizaĝon de la hidroĝeno. La kimikaj potencialoj egalu  $\mu_p + \mu_e = \mu_H + \mu_\gamma$ . Oni ponas  $\mu_\gamma \simeq 0$  ĉar la numero de fotonoj [ne ŝanĝas la energio de la sistemo]. Se la denseco de elektronoj kaj protonoj estas

$$\mathbf{n}_e = g_e \left(\frac{m_e \mathcal{T}}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\mu_e - m_e}{\mathcal{T}}} \quad \mathbf{n}_p = g_p \left(\frac{m_p \mathcal{T}}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\mu_p - m_p}{\mathcal{T}}}$$

oni havus ke

$$B := m_p + m_e - m_H$$

$$\mathbf{n}_H = \frac{g_H}{g_e g_p} \mathbf{n}_p \mathbf{n}_e \left(\frac{m_e \mathcal{T}}{2\pi}\right)^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{B}{\mathcal{T}}}$$

Si oni difinas  $\Xi_e := \mathbf{n}_p / \mathbf{n}_B = \mathbf{n}_e / \mathbf{n}_B$  kaj  $\Xi_e = 0.1$  oni trovas la **|Saha-a Ekvacio|**

$\eta$  frakciono de barionoj sur fotonoj

$$\frac{1 - \Xi_e}{\Xi_e^2} = \mathbf{n}_B \left(\frac{m_e \mathcal{T}}{2\pi}\right)^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{B}{\mathcal{T}}} \quad \mathbf{n}_B := \eta \mathbf{n}_\gamma = \eta \frac{2\zeta(3)}{2\pi} \mathcal{T}^3$$

Oni povas vidi ke la Saha ekvacio ne donas la korektan temperaturon de deionizaĝo kiam la sistemo ne estas en ekvilibrio ĉar oni havas multaj fotonoj kiuj ankoraŭ perturbas la sistemon. Si oni volas trovi la temperaturo de la primodiala nukleosintekso oni uzos

$$\frac{\mathbf{n}_p}{\mathbf{n}_n} \simeq \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{3/2} e^{-\frac{Q}{\mathcal{T}}} \quad Q := m_n - m_p \simeq 1.3 [MeV]$$

## 13.1 Jeans Modelo

$\hat{L}$  Liuville-a operatoro,  $\hat{C}$  koliza operatoro Sekvinte la Boltzmann ekvacio oni volas trovi la distribua funkcio  $f(\mathbf{\Gamma}, t)$  kiu solvas

$$\hat{L}[f] = \hat{C}[f] \quad \hat{L} := \partial_t + d_t \mathbf{x} \nabla_{\mathbf{x}} + d_t \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{v}} = \partial_t + \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \nabla_{\mathbf{v}}$$

Se

$$\mathbf{n}(t) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p f(\mathbf{\Gamma}, t) \quad \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{\mathcal{E}} \hat{L}[f] = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{\mathcal{E}} \hat{C}[f]$$

kiu estas solvebla en

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{\mathcal{E}} \left( \mathcal{E} \partial_t f - \frac{\dot{a}}{a} |\mathbf{p}^2| \partial_{\mathcal{E}} f \right) = \dot{\mathbf{n}} + 2 \int d^3 p p d_p f = 2 \int d\Omega \int d p p^2 p \partial_p f$$

kiu integrinte por partoj oni donas

$$\dot{\mathbf{n}} + 3 \frac{\dot{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{\mathcal{E}} \hat{C}[f] = -\langle \sigma v \rangle \mathbf{n}^2 + C = \langle \sigma v \rangle (\mathbf{n}_{eq}^2 - \mathbf{n}^2)$$

Do la metrika denseco kunmova  $\mathbf{n}_c \simeq \mathbf{n}_0 (a/a_0)^3$  valoras

$$\dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{n}}_c \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \quad \dot{\mathbf{n}}_c - \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \mathbf{n}_{c,eq} \langle \sigma v \rangle \left( \left( \frac{\mathbf{n}_c}{\mathbf{n}_{c,eq}} \right)^2 - 1 \right)$$

## 13.2 Astrofiziko

Si oni prenas sferika distribuo de partikloj oni havas du opozitaj forcoj, la gravitazio-nala kaj la presiona gradiento. Por kalkuli la kampo valoras la Gauss-a teoremo kaj la kampo depenas de la maso ene la sfero konsiderita.

$$-j^2 = \frac{Gm(r)}{r^2} + \frac{1}{\rho(r)} d_r \mathcal{P}$$

Se oni enmetas al la ekvilibrio oni devas solvi

$$\int_0^R 4\pi r^3 d_r \mathcal{P} dr = \mathcal{P}(r) 4\pi r^3 \Big|_0^R - 3 \int_0^R \frac{Gm(r)}{r} dm = - \int_0^R \frac{Gm(r) \rho(r) 4\pi r^2}{r^2} = \mathcal{E}_{gravita}$$

Do oni formulas  $\langle \mathcal{P} \rangle = -\mathcal{E}_{gr}/3V$ . Per la dekompono de la movo en isotropa spaco la presiono estas la media valoro de la produkto  $\mathbf{v}\mathbf{p}$

$$\mathcal{P} = \frac{\mathbf{n}}{3} \langle \mathbf{p}\mathbf{v} \rangle \quad \stackrel{NR}{=} \frac{2}{3} \mathbf{n} \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle = \frac{2}{3} \mathcal{E}_k \quad \stackrel{R}{=} \frac{1}{3} \mathbf{n} \langle p c \rangle = \frac{1}{3} \mathcal{E}_k$$

Tiu estas la **Virialo Teoremo** kaj oni povas formuli al la ekvilibrio  $2\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = 0$  kiu eksprima la relacio inter la kinetika kaj potenciala energio por ne relativecaj partikloj. Kun la konservo de la energio  $\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{tot}$  oni diros ke  $\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_{gr}/2$ . Tiu teoremo estas grava en la konsidero ke se oni havas gason kiu perdas energion sur la surfaco la gravita energio povas malkreksi dume la kinetika kreskas altiginte la temperaturon, se anstataŭe la kinetika energio malkreskas per la radiado la gravita energio altigas la energion de la nuklearaj interadoj. Se la gaso estas en relativeca proksimado la sistemo estas en nestabila ekvilibrio ĉar la du forcoj havas la saman grandeco. La masa limo por la nestabileco estas la **Chandrasekhar-a Maso**  $M = 1.4M_{\odot}$ , la steloj kun maso malpli de la Chandrasekhar-a maso devenas blankaj nanoj dume la alia povas elmeti grandan parton de sia maso en ia *supernova* aŭ kolapsi en *neŭtrona stelo* aŭ *nigra tru*

En la adiabatika proksimado  $\mathcal{P}V^\gamma = c$  la variablo de la interna energio dependas sole de la laboro farita de la sistemo

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{d\mathcal{P}}{\mathcal{P}} = 0 \quad d\mathcal{U} = -\mathcal{P}dV = \frac{1}{\gamma-1}d(\mathcal{P}V) \quad \langle \mathcal{P} \rangle = (\gamma-1) \frac{\mathcal{U}}{V} = -\frac{1}{3} \frac{\mathcal{E}_g}{V}$$

Si la partikloj ne havas ekscititaj gradoj de libereco  $\mathcal{U} = \mathcal{E}_k$  kaj  $\mathcal{E}_{tot} = -(3\gamma-4)\mathcal{E}_{in}$  kaj esprimas la liga stato de la sistemo por  $\gamma > 4/3$ . La energio de la sistemo per partiklo estas  $\mathcal{E}_k = 3/2Nk_B\mathcal{T}$  kie  $N$  estas preskaŭ donita de la maso de la hidroĝeno  $N \simeq M/m_H$ . Si oni volas ke la sistemo kuntrahiĝas  $|\mathcal{E}_g| > \mathcal{E}_k$  kaj oni trovas la **|Jeans-a Denseco|** kaj maso kiu donas la limito por havi gravitacionala kontraĥiĝo

$$M_J = \frac{3k_B\mathcal{T}}{2G\bar{m}}R \quad \rho_J = \frac{3}{4\pi M^2} \left( \frac{3k_B\mathcal{T}}{2G\bar{m}} \right)^3$$

Ĉi tiu al ni diras ke oni bezonas de nebulozo de preskaŭ 1000 sunaj masoj kaj densecoj de  $10^5$  molekuloj per  $[m^3]$  al la  $20[K]$  temperaturo por havi gravitacionalan kontraĥiĝon kaj la formado de amason de steloj. Oni havas protostelo kiam la temperaturo superas la energio de deasocio de la hidroĝena molekuloj  $\mathcal{E}_D \stackrel{n}{=} 4.5[eV]$  kaj la ionigo de de la  $H$  molekulo  $\mathcal{E}_I \stackrel{n}{=} 13.6[eV]$ . De la viriala teoremo oni havos ke

$$\mathcal{E}_g \simeq -\frac{GM^2}{R} \simeq \frac{1}{2} \frac{M}{m_h} \mathcal{E}_D + \frac{M}{m_H} \mathcal{E}_I = 2 \cdot 2 \frac{M}{m_H} \frac{3}{2} k\mathcal{T} \quad k\mathcal{T} \simeq \frac{1}{12} (\mathcal{E}_D + 2\mathcal{E}_I)$$

Oni havas Pauli repulsiu kiu povas malebligi la formado de stelo per Fermi-a gaso. La partikloj havas De Broglie-a ond longeco kiu devas esti pli granda de la media longeco per partiklo por havi la kondicon de stelemo

$$\lambda \simeq \frac{\hbar}{\sqrt{m_e\mathcal{T}}} \quad \rho < \bar{m} \frac{(m_e k_B \mathcal{T})^{\frac{3}{2}}}{\hbar^2}$$

Se oni ne havas stelemo  $M < 0.08M_\odot$  la deĝenera elektronoj estas gravaj kaj la protostelo devenas *nano bruna*.

La formado de la steloj permetas la kreo de la elementoj kiuj troviĝas sur la tero. Uzinte la **Weizsäcker**-a masa formulo oni vidass ke de la  $H$  al la  $Fe$  (la pli stabila) la reakcio estas esotermaj kaj oni gajnas energion transforminte la elementoj en la pli pezaj se la temperaturo permetas al la reakcio de okazi. Foje kiam la temperaturo estas tre alta la fotonoj povas esti kaptitaj en la endoterma reakcioj kiuj permetas de malaltigi la kinetikan energion kaj altigi la gravitan. La alia elementoj eblas formi ilin per neŭtrona kapturo kaj  $\beta$  defalo kiu oni povas fari rigardinte la nuklida tabelo.

Oni havas intereza relacio inter la maso, la lumeco kaj la durado de la steloj. La lumeco kaj la maso havas proporcio  $L \propto M^{\approx 3}$  dume la temp vivo  $t \propto M^{\approx -2.5}$ , inverse proporcionala! Oni havas ankaŭ la bone notita **|Hertzsprung-Russel-a Diagramo|** kiu esprimas la grafo de la lumeco  $L$  kontraŭ la surfaca temperaturo  $\mathcal{T}$ : ( $\mathcal{T}_{maks} - \mathcal{T}, L$ ). La diagonalo prezentas la *principalan sekvencon* kiu difinas la steloj kiel la suno, bas maldekstre oni havas la *blankaj nanoj*, varmaj sed malmulte lumaj dume alt dekstre la *roza gigantaj*.

## Appendice A

# Computacionala Metodo

### A.1 Difinoj

La **bit** (*binary digit*) estas la unueco de la informo 0 aŭ 1, vera aŭ nevera. La **byte** estas ia fiksa numero de *bit* kiu formas parolon. Iu *byte* povas esti uzita por karakteroj (1 *byte*), aŭ numeroj. La numeroj povas esti interoj (longaj 4 *byte* aŭ mallongaj 2 *byte*, kun aŭ sin signo) aŭ je mova komo (*float* 4 *byte* aŭ *double* 8) notitaj per  $s * m * 2^{b-127}$ : mantissa (16 aŭ 38 *bit*), signo (1 *bit*) kaj bias (tot *bit*). La stableco de algoritmo estas la enfero de operacionala aproksimeco sur la rezulto. Oni havas diversaj **Metodoj**

DIREKTA	sine rondigo en finita numero de paŝoj (ekz: Gauss)
ITERAKTIVA	vico kiu konverĝas al la solvado fine al la elektita valoro $\epsilon > \ f(x) - f_n(x)\ $ (ekz: )
UNUOPA PAŜO	La vico dependas sole de la antaŭa iterado $x_{i+1} = f(x_i)$ (ekz: Newton pro nelinearaj sistemoj, Runge-Kutta)
MULTOBLA PAŜO	kiu dependas pro antaŭaj iteradoj $x_{i+1} = f(x_i, x_{i-1}, \dots)$ (ekz: Adams-Moulton, Adams-Bashfort)
[-[ESPLICITO]	kiam $x_{i+1}$ ne dependas de $f(x_i, \dots)$ en la sama momento (ekz: Adams-Bashforth)
[-[IMPLICITO]	kiam $x_{i+1}$ dependas de $f(x_i, \dots)$ en la sama momento (ekz: Adams-Moulton)

### A.2 [Codice]

En tiu sekcio oni volas meti la [codice]n kiu estas de mi mem skribita, provita kaj uzita en la programoj kiu mi uzas. Estas simplaj instruadoj por solvi unu dimensioj problemoj.

#### Integrado

Reglo Simpson 3/8

```
double Matematica::Integrazione(double a,double b){
    double Delta = (b-a)/(double)NPassi;
    double Resp = 0;
    for(int i=0;a+((double)i)*Delta<b;i+=3){//+3 se si sovrappongo
        Resp += 3*3*Delta*( f(a+Delta*i)+3*f(a+Delta*(i+1))+3*f(a+Delta*(i+2))+f(a+Delta
    )
    return Resp;
}
```

## Interpolado

Minimumaj kvadratoj derivo por la lineara interpolado

```

RETTA Matematica::InterRett(double *Px,double *Py,int NMass){
  RETTA r1;
  double Mediax = 0.;
  double Mediy = 0.;
  double Scartox = 0.;
  double Scartoy = 0.;
  Uno=0;Due=0;;UnoUno=0;ZeroUno=0;ZeroDue=0;
  for(int i=0;i<NMass;i++){
    Uno += Px[i];
    Due += QUAD(Px[i]);
    ZeroUno += Py[i];
    UnoUno += Px[i]*Py[i];
    ZeroDue += QUAD(Py[i]);
  }
  Mediax = Uno / (double) NMass;
  Mediy = ZeroUno / (double) NMass;
  Scartox = (Due - Uno*Uno)/(double)NMass;
  Scartoy = (ZeroDue - ZeroUno*ZeroUno)/(double)NMass;
  r1.Corr = (UnoUno - Uno*ZeroUno) / (double) NMass;
  r1.r = r1.Corr / ( sqrt(Scartox*Scartoy) );
  r1.m = (NMass*UnoUno - Uno*ZeroUno) / (NMass*Due - Uno*Uno);
  r1.ErrM = Scartoy * sqrt( Due / (NMass * (Due - Uno*Uno)));
  r1.q = (ZeroUno - r1.m*Uno)/NMass;
  r1.ErrQ = Scartoy * sqrt( 1 / (NMass * (Due - Uno*Uno)) );
  return r1;
}

```

## Diskreta Fouriera Trasformo

```

void Matematica::SpettroDFT(double *st,double *sw,int NMass){//N=int^2
  double Re1=0.,Im1=0.,Re2=0.,Im2=0;
  double FMass=(double)NMass/DUE_PI;
  for(int j=0;j<(int)(NMass/2);j++){
    Re1=0.;Re2=0.;Im1=0.;Im2=0.;
    for(int i=0;i<(int)(NMass/2)-1;i++){
      Re1+=st[2*i]*cos(DUE_PI/(double)NMass*(double)(2*i)*(double)j);
      Im1-=st[2*i]*sin(DUE_PI/(double)NMass*(double)(2*i)*(double)j);
      Re2+=st[2*i+1]*cos(DUE_PI/(double)NMass*(double)(2*i+1)*(double)j);
      Im2-=st[2*i+1]*sin(DUE_PI/(double)NMass*(double)(2*i+1)*(double)j);
    }
    sw[j]= QUAD((Re1+Re2)/(double)NMass)+QUAD((Im1+Im2)/(double)NMass);
  }
}

```

## Autokorelado

```

void Matematica::Autocor(bool *st,double *sAutocor,int N){
  for(int i=0;i<N;i++){
    sAutocor[i] = 0;
    for(int j=i,l=i;j<N+i;j++,l++){
      if(j == N) l=0;
      sAutocor[i] += (double) (st[j-i]*st[l])/N;
    }
  }
}

```

```
    }  
  }  
}
```

### A.2.1 Memsimileco

```
void Matematica::Autosimilarita(double *st,int NMass,double *sw,int Potenze){  
  for(int j=0;j<Potenze;j++){  
    sw[j] = 0.;  
  }  
  for(int i=0;i<NMass;i++){  
    Temp = 1;  
    for(int j=0;j<Potenze;j++){  
      Temp *= st[i];  
      sw[j] += Temp;  
    }  
  }  
  for(int j = 0;j<Potenze;j++){  
    sw[j] = log10(POS(sw[j]))/log10((double)NMass);  
    // printf("sw[%d] %f\n",j,sw[j]);  
  }  
}
```

# Appendice B

## Tabeloj

### B.1 Kostantoj

Kvanteco	Simbolo	Valoro
Lum rapideco	$c$ [m/s] $10^8$	2.997'924'58
Plank-a	$h$ [Js]	6.626'069'3 <sub>11</sub>
Plank-a [tagliata]	$\hbar$ [Js]	1.054'571'68 <sub>18</sub>
	$\hbar$ [MeVs]	6.582'119'15 <sub>56</sub>
Konversio	$\hbar c$ [eVnm]	197.326'968 <sub>7</sub>
Uneca ŝarĝo	$e$ [As]	1.602'176'53 <sub>14</sub>
Elektrona maso	$m_e$ [MeV/c <sup>2</sup> ]	0.510'998'92 <sub>4</sub>
Protona maso	$m_p$ [MeV/c <sup>2</sup> ]	938.272'03 <sub>8</sub>
Bohr-a magnetego	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	5.788'381'804 <sub>39</sub>
Nukleara magnetego	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	3.152'451'259 <sub>21</sub>
Bohr-a radio	$a = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2$ [Å]	0.529'177'210'8 <sub>18</sub>
$e^-$ hidroĝena rapideco	$v_o^{e^-} = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar$ [m/s] $10^6$	2.187'7
Hiperfina kostanto	$\alpha = v_o^{e^-}/c$	1/137.035'999'710 <sub>96</sub>

# Bibliografia

- [1] C. Minnaja *Vocabolario Italiano-Esperanto* (CoEdEs 1996 Milano)
- [2] T. Ötiger *The not so short Intruduction to L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X* (www. )
- [3] S.Aliprandi *Teoria e Pratica del Copyleft* (NdA Press 2006 SantaGiustina (Ri))
- [4] G.Sansone *Lezioni di Analisi Matematica* (Cedam 1944 Padova)
- [5] G.Bagnera G.Ricci *Lezioni sopra la Teoria delle Funzioni Analitiche* (Tip-Lit Tenconi 1927 Milano)
- [6] Corazza Someda *Elementi di Calcolo Vettoriale e Tensoriale* (Pitagora Editrice 1982 Bologna)
- [7] Besançon *The Encyclopedia of Physics* (Van Nostrand Reinhold C. 1985 New York)
- [8] Ing. JUDr.M.Tuma CSc *Pri la Varmo* (?? 1971 Āesk)
- [9] A. Bettini *Meccanica e Termodinamica, Elettromagnetismo, Le Onde e la Luce* (Decibel 2002 Padova) *dispense*
- [10] A.Buffa,L.Giudicotti *Fisica dei Plasmi* (Padova 2005)
- [11] E. Perucca *Fisica I,II*
- [12] Zanella *Dispense*
- [13] Fassò *Dispense* (www.math.unipd.it/ Fassò)
- [14] G. Benettin *Dispense* (www.math.unipd.it/ Benettin)
- [15] Richtmayer, Kennard, Cooper *Introduction to Modern Physics* (Tata McGraw-Hill 1997 New Delhi)
- [16] V. Arnol'd *Metodi Matematici della Meccanica Classica* (Editori Riuniti 2004 Trebaseleghe (Pd))
- [17] Landau Lifšfit *Mecanica* (Editura Tehnică 1966 București)
- [18] G. Sartori *Lezioni di Meccanica Quantistica, Lezioni di Fisica Teorica* (Libreria Cortina 1998,2006 Padova)
- [19] Passatore *Esercizi di Meccanica Quantistica* bibitemTamvakis Tamvakis *Problems and Solutions in Quantum Mechanics*
- [20] A.L.Fetter J.D.Walecka *Quantum Theory of many Particle System* (Dover 2003 Minesola,New York)
- [21] K. Huang *Meccanica Statistica*



- [22] L.Landau E.Lifchitz *Physique Statistique* (Mir 1996 Moscou)
- [23] G.Mussardo *Il Modello di Ising e introduzione alla teoria dei campi e alle transizioni di fase* (Bollati Boringhieri 2007 Torino)
- [24] J. S. Lilley *Nuclear Physics* (Wiley 2005 Norfolk, UK)
- [25] Povh *Nuclei e Particelle*
- [26] Rigamonti *Introduzione alla Struttura della Materia* (La Goliardica Pavese 1991 Pavia)
- [27] B.H.Brandsend C.J.Joachain *Physics of atoms and molecules*
- [28] H.Ibach,H.Lüth *Solid-State Physics* (Springer 2003 Berlin)
- [29] Anderson *Physics Vademecum* (American Institute of Physics 1981 New York)
- [30] D-aj A-oj *Manuale Cremonese di Meccanica Elettrotecnica e Elettronica*
- [31] E.Angeleri *Informazione Significato e Universalità* (UTET 2000 Torino)
- [32] Peter Coles, Francesco Lucchin *Cosmology, the origin and the evolution of the cosmic structure* (Wiley 2000 Chichester UK)

# Indice analitico

- Akcelo, 22  
Akcia Funkcionala, 23  
Akcio, 23  
Akordo Temperata, 18  
**akvo disiganta**, 15  
Alias, 12  
**Angula transformo**, 34  
**Armonika Perturbado**, 50  
Atenua Faktoro, 12  
atomaj unecoj, 73  
Autokorelacio, 11
- Banda Strukturo en SC retiklo**, 84  
Bandoj Rotaciaj, 89  
Bessel-a, Ekvacioj7  
bit, 102  
Boltzmann-a, Ekvacio85  
Bose Einstein-a, Kondenso64  
**Bose-Einstein-a Kondenso**, 67  
Bosono, 62  
bra, 39  
Bravais-a, Retiklo78  
byte, 102
- C-Operatoro**, 93  
**Centra Kampo**, 22  
Centro, 21  
**Centroj Adsorbaj**, 65  
Chandrasekhar-a, Maso100  
**Clebsh-Gordan**, 46  
Clebsh-Gordan-a, Koeficientoj46  
CMB Kosma Mikroonda Fondo, 98  
Coulomb-a, gauge3
- D'Alambert  $\square$ , 10  
**Defalo**, 33  
Dekuplaĝo, 99  
**Diada Akordo**, 18  
Dielektrika Kostanto, 4  
Difuzo, 17  
Dipola Magnetik Momanto, 4  
Dirac-a, Matricoj94  
Dirac-a  $\delta$ , 33  
Disigilo, 20  
Distinga Kapablo, 17  
**distribuo**, 32  
**Du axutostatoj**, 65
- Dyson-a, Ekvacio57
- Einstein-a, Konvencio26, Koeficiento76  
Ekvilibra Konfigurado, 20  
Ekvilibra Punkto, 20  
Ekvilibro Asintota Firma, 21  
Ekvilibro Firma, 21  
Ekvilibro Nefirma, 21  
**Elektrika Maso**, 1  
Elektromagnetika Tensoro, 32  
Energio Obskura, 97  
Ensemble, 58  
Entalpio, 61  
Entropio, 58  
Ero, iii  
Euler-a  $B$ , 62  
Euler-a  $\Gamma$ , 62  
Evento, 27
- Faza Portreto, 19  
Faza Spaco, 19  
Fermi-a, Energio64, Gaso81  
**Fermi-a Energio**, 64  
Fermiono, 62  
**Fermionoj**, 66  
Flick-a Relacio, 6  
Flukso, 20  
Fonono, 66  
Forco Nukleara, 87  
**Fotonoj**, 65  
Fourier-a, Bazo10, Sistemo10, Transformata11, Lokata Transformo12, Transformo Diskreta12  
Frekvenco pola, 14  
Frenet-a, Bazo21  
Friedmann-a, Ekvacioj95  
Fundamenta La, 18  
**Funkcio Gxenerila**, 25  
Funkcio Lokanta, 12  
Funkcio Partaga, 59  
Funkcio Proba, 33
- $\gamma$ -spaco, 58  
**Gasu duatoma en unudimensio**, 61  
**Gasu en rotanta cilindro**, 60  
**Gasu sub gravita forco**, 60  
GateauxDerivaĵo, 23

*Gauge* Nevarianteco, 32  
 Geodetiko, 23  
 Gibbs-a, Interna Energio61  
 Glata Ligilo, 21  
 Gram-a, Koeficiento27  
**Gravita Maso**, 1  
 Grupo, 28  
**Grupoj**, 44  
 Ĝeneratoro Infinitesima, 44  
  
 Hall-a, Efekto2  
 Hamilton, 51  
 Hamilton-a, Sistemo23  
 Helmholtz-a Libera Energio, 61  
 Hermite-a, Polinomio46  
 Hertzprung-Russel-a, Diagramo101  
 Hubbleleĝo, 96  
  
 Indico Rifrakta, 15  
 Infinitesima Transformaĵo, 44  
 Interna Energio, 61  
 Intervalo Spac Tempa, 27  
 Iperŝarĝo, 94  
 Isospin, 89  
  
 Jacobi-a, Identajxo44  
 Jeans-a, Denseco101  
 Johnson-a, Bruo72  
  
 Kampo, 1, 20  
**Kampo Elektro Magnetiko**, 35  
 ket, 39  
 Kompona Reglo de Angul Momentoj, 45  
 Konfigura, 19  
 Konfiguracia Spaco, 19  
 Konforma Tempo, 96  
 kontraŭvarianta, 26  
 Korpo Nigra, 36  
 Kosmologa Kostanto, 97  
**Kostanta Potencialo**, 50  
 kovarianta, 26  
 Kroneker-a  $\delta$ , 26  
 Kvar potencialo, 32  
  
**L**, 78  
 Lagrange Euler-a, Ekvacio22  
 Lagrange-a, Kompono de la Ekscito22  
 Land'e Faktoro, 75  
 Lande-a Regla de la iIntervalo, 75  
 Laplace-a, Transformo11  
 Legendre-a Transformaĵoj, 24  
 Lehman-a, Prezento57  
**Lie-a Algebro**, 44  
 Lie-a Derivaĵo, 24  
 Ligilo Olonoma, 19  
 Longeco Karatkeriza, 70  
  
 Lorentz-a, gauge3  
 Lorentz-aj Transformaĵoj, 28  
  
 Magnetizaĝo, 70  
 Malforta Vektora Kuranto, 94  
 Mandelstam-aj Variabloj, 31  
 Maso [Efficace], 81  
 Matrica Notacio, 26  
 Mem Energio Propra, 56  
 Memspaco, 38  
 Memstato, 38  
 Metrika Matrico, 23  
 Minkovskij-a, Metriko27  
 Mott-a, Transiro82  
 $\mu$ -spaco, 58  
  
 Nedetermina Principo, 12  
 Notacio Spektroskopa, 74  
 Nukleono, 87  
 Numero Onda, 10  
 Numeroj Magxikaj, 88  
 Nyquist-a, Frekvenco Kritika12  
  
 Ond Longeco Terma, 60  
 Ondo, 10  
 Ondo Disusa, 15  
 Operatoro, 38  
 Orbito, 19  
  
 Pado libera media, 6  
 Paketo, 16  
 Parametro Orda, 69  
**Pareco**, 29, 39, 93  
 Parseval-a, Teoremo11  
 Pauli-a, Matrico46  
 Pauli-a Eskluda Principo, 62  
 Peltier-a, Efekto86  
 Periodo, 21  
 Piono, 87  
 Pitagora-a, Akordado18  
 Plank-a, Maso98  
 Pointyng-a, Vektoro3  
**Polaraj Koordinatoj**, 24  
 Polarizaĝo, 4  
 Polo Dominanta, 14  
**Posicio**, 39  
**Potenciala Kav**o, 41  
 Potencialo, 1  
 Potencialo Generaligita, 21  
 Poynting-a, Teoremo3  
**Presiono**, 66  
 Prezento NeRedukebla, 44  
 Probabla Denseca Kuranto, 41  
 Probabla Denseco, 71  
 Probabla Momanto, 71  
 Probablo, 59

Projektoro, 41  
 Proksimaĝo de Media Kampo, 68  
 Propra Frekvenco, 12  
 Pulsado, 10  
  
 Radia Ekvacio, 48  
 Rapideco Faza, 15  
 Rapideco Grupa, 15  
**Reacio**, 33, 34  
 Refleksado Koeficanto, 80  
 Reglo Selekcia Dupola, 76  
 Relikto Kosmiko, 99  
**Resonanca Kesto**, 14  
 Richardson Dushman-a, Legxo82  
 Robertson Walker-a, Metriko96  
 Roza Traslado, 96  
  
 Saha-a, Ekvacio99  
 Schroedinger-a, Ekvacio38  
 Seebach-a, Efekto86  
 Selo, 20  
**Sfera Koordinatoj**, 21  
 Spaco Proba, 33  
 Speciamento, 12  
 Spektro, 38  
 Spektro Potenca, 11  
 Stone-a, Teoremo44  
  
 Tanĝa Fibrato, 19  
**Temp dipenda Potencialo**, 49  
**Tempa Nevariacio**, 29  
 Tempa [Rilassamento] Proksimaĝo, 85  
 Tempo Defala, 14  
 Tempo Kohera, 16  
**Tensora Produkto**, 45  
 Termodinamika Limito, 58  
 Th: Bloch-a Teoremo, 83  
 Th: Centra Limito, 71  
 Th: de Egala Partumigo de la Energio, 61  
 Th: Helmholtz-a, 2  
 Th: Lagrange-a Multiplikatoro, 59  
 Th: Liouville-a, 23  
 Th: Noether-a, 23  
 Th: P, 17  
 Th: Parseval, 71  
 Th: Spac Tempa Intervalo, 27  
 Th: Th de Lagrange-Dirichlet: , 22  
 Th: Wiener-Khinchin, 11  
 Th: Winer Khintchin, 72  
 Th: Young, 69  
 Thomas Fermi-a Proksimaĝo, 82  
 Thomas Fermi-a, Radio82  
 Timbro, 18  
 Tolomeo-a, Akordado18  
 Tono, 18  
 Totala Angula Momanto, 89  
  
**Traslacio**, 39  
 Trasmesado koeficanto, 80  
  
 Unua Apudoj, 70  
 Unua integralo, 20  
 Urta Parametro, 90  
 Urta Sekcio, 90  
 Urta Sekcio de Adsorbo, 76  
  
 Van der Waals-a, Ekvacio68  
 Variacio, 23  
 Varianco, 71  
 Vektora Spaco, 39  
**Vektoraj Spacoj**, 39  
 Virialo Teoremo, 100  
  
 Weisskopf-a-j Unuecoj, 90  
 Woods-Saxoon, 87  
 Wronsky-a, Teoremo41